Kostadin Trençevski
Aneta Gacovska
Nadica Ivanovska

MATEMATIKA PËR EKONOMISTË

PËR VITINE III-të TË ARSIMIT PROFESIONAL KATËRVJEÇAR

EKONOMIK, JURIDIK, TREGTI
TEKNIK PËR TREGTI DHE MARKETING

Recensentë:
Dr. Biljana Kërsteska, profesoreshë në FSHMN, UKIM, Shkup, kryetare
Lidija Kuzmanovska, profesoreshë në SHMH „Lazar Tanve", Shkup, anëtar
Lubica Dimitrova, profesoreshë në SHM „Gjosho Vikentiev", Koçanë, anëtar

Përkthyes:
Muzafer Beqiri

Redaktor i botimit në gjuhën shqipe:
Prof. dr. Sadri Shkodra

Lektor:
Abdulla Mehmeti

Botuesi:
Ministria e arsimit dhe shkencës e Republikës së Maqedonisë

Shtypi:
Graficki centar dooel, Shkup

Me aktvendim të Ministrisë për Arsim dhe Shkencë të Republikës së Maqedonisë, numër 22-4386/1, të datës 29.07.2010 ky tekst shkollor lejohet për përdorim.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св.Климент Охридски" , Скопје
512 . 1 (075.3)
51 - 77 (075.3)
ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Математика за економисти за III година на четиригодишното стручно образование: економско-правна и трговска струка техничар за трговија и маркетинг / Костадин Тренчевски, Анета Гацовска, Надица Ивановска. - Скопје: Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2011, - 288 стр. : граф. прикази ; 29 см
ISBN 978-608-226-177-5
1. Гацовска, Анета [автор] 2. Ивановска, Надица [автор]
COBISS.MK-ID 86465034

Parathënie

Teksti **MATEMATIKA PËR EKONOMISTË** për vitin e tretë të arsimit profesional katërvjeçar është shkruar sipas programit mësimor për lëndën e përmendur të obligueshme të për vitin e tretë të arsimit katërvjeçar profesional. I dedikuar para së gjithash, sipas planit mësimor për nxënësit e profesionit ekonomiko juridik dhe tregtar në profilin arsimor teknik për tregti dhe marketing . Autorët tentojnë t'i përpunojnë përmbajtjet e parapara në pajtim me udhëzimin didaktik-metodik për realizimin e mësimit. Teksti përbëhet prej nëntë tërësive tematike. Në kuadër të çdo teme mësimore janë përpunuar përmbajtjet e parapara të cilat, sipas rregullës, janë ilustruar me shembuj dhe vizatime. Në fund të çdo njësie mësimore, janë dhënë detyra për punë të pavarur në orën mësimore ose për detyrë shtëpie, e cila paraqet vazhdim të punës në orën mësimore dhe ajo është shkalla më e lartë e punës së pavarur të nxënësit. Në fund të tekstit janë dhënë përgjigje dhe zgjidhje të shkurtra të detyrave, por sipas zgjedhjes autorët diku edhe udhëzime për zgjidhjen e tyre.

Tema e parë mësimore **„Llogaria e thjeshtë e kamatës "** ka për qëllim ta aftëson nxënësin të zbaton llogarinë e thjeshtë të kamatës, llogaria terminore, llogaria e diskontit dhe llogaria e depozitit. Përvetësohen edhe konceptet për llogari kreditore, xhirollogari dhe llogari transaksionale.

Përvetësimi i materialit të ekspozuar te tema e dytë mësimore **„Metalet e çmuara, valutat dhe devizat "** jep mundësi për përvetësimin e njohurive nga lëmi i metaleve të çmuara, si edhe teknika për njehsimin e përsosshmërisë, masa e metaleve të çmuara në legura dhe masën e legurave. Përveç kësaj nxënësi njihet me konceptet vatë dhe deviza, ku theks të veçantë është vendosur në zgjidhjen e detyrave me shitblerje të valutave dhe shitblerja e devizave.

Tema e tretë mësimore **„Barazime eksponenciale dhe logaritmike"** është orientuar kah futja e koncepteve shkalla me tregues real dhe logaritëm. Kjo paraqet bazë nisëse për zgjidhjen e llojeve të veçanta të barazimeve eksponenciale dhe logaritmike.

Me përvetësimin e materialit që është dedikuar për temën e katërtë mësimore **„Funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë"** nxënësi do të përvetëson njohuritë themelore nga lëmi i trigonometrisë, që nënkupton përvetësimin e funksioneve trigonometrike themelore sinus, kosinus, tangens dhe kotangens prej këndit të ngushtë dhe zbatimi i tyre në gjeometri dhe gjerësisht në praktikë.

Te tema e pestë **„Drejtëza dhe rrafshi"** nxënësit udhëzohen të përvetësojnë metodat e gjeometrisë analitike në rrafsh. Në veçanti, do të njihen me formulat për largësinë ndërmjet dy pikave, ndarja e segmentit në raport të dhënë dhe njehsimi i syprinës së trekëndëshit.

Në vazhdim do të njihen me llojet e ndryshme të barazimeve të drejtëzës. Në fund të materialit të parashtruar do të mësojnë për problemet metrike, në kuptimin e njehsimit të këndit ndërmjet dy drejtëzave dhe njehsimi i largësisë prej pikës deri te drejtëza.

Përvetësimi i materialit të parashtruar te tema e gjashtë **„Progresionet"** mundëson zgjerimin e njohurive të nxënësve në lidhje me vargjet prej numrave real. Në veçanti ato do të njihen me progresionin aritmetik dhe gjeometrik, me formulat për njehsimin e anëtarit të përgjithshëm të progresionit aritmetik e gjeometrik, dhe me formulat për njehsimin e shumës dhe *n* anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik dhe aritmetik.

Materiali që është parashtruar te tema **„Llogaritja e kamatës së përbërë ",** trajtimin e të cilit më tutje do ta shënojmë me shkurtesën *i / i*, mundëson kontrollimin e njohurive të nxënësit për llogarinë e thjeshtë të kamatës dhe përvetësimi i konceptit llogaria e kamatës së përbërë. Shqyrtohet kamatizimi anticipativ dhe dekurziv, ku nxënësi do të përvetëson shkathtësi për njehsimin e normës së kamatës, kamata dhe periudha e kamatizimit.

Te tema e tetë **„Deponimi periodik dhe të ardhurat periodike"** nxënësi njoftohet me deponimin anticipativ dhe dekurziv dhe njehson vlerën e fundit gjatë deponimit anticipativ dhe dekurziv. Në fund zgjidh probleme me zbatimin e llogarisë së përbërë të kamatës, deponimeve dhe rentat.

Në fund, tema e nëntë **„Huatë",** nxënësi njihet me konceptet huaja, perioda e amortizimit anuiteti, pagesa. Njehsohet huaja me anuitet e njëjta, njehsohet pagesat, huatë me anuitete e rrumbullakuara edhe për llojet e ndryshme të huave përpunohen plane amortizuese.

Gjatë realizimit të këtij teksti arsimtari mundet lehtë të tenton në punë të pavarur nga ana e nxënësve.

Falënderim të veçantë recensentëve të këtij teksti, sugjerimet dhe vërejtjet e të cilëve kontribuuan për përmirësimin e kualitetit të tij.

Autorët prej më parë do të jenë të falënderuar për çdo kritikë me qëllim të mirë ose vërejtje për përmirësimin e përmbajtjes pasi besojnë se ky tekst do të kontribuon nxënësit e profesionit ekonomik-juridik të njihen me përmbajtjet të cilat do të jenë në dobi të përsosjes së tyre profesionale.

Maj, 2010 Autorët

PËRMBAJTJA

1 LLOGARIA E THJESHTË E KAMATËS

1.1. Njehsimi i kamatës së thjeshtë

1.1.1. Konceptet themelore

Jeta e përditshme është përcjellë me deponime të mjeteve në bankë, në llogaritë transaksionale, libreza kursimi, kartela kreditore. Rrogat dhe kompensimet rrogave, pensioneve, kursimeve, më së shpeshti mjetet e parave të cilat i janë lënë bankës në periudhë kohore të caktuar, me mundësi të merren kur për atë është e nevojshme. Ndërmjet kohës, banka i shfrytëzon mjetet, kurse për atë deponuesit banka i llogarit kamatë. Gjithashtu, shpeshherë qytetarët kanë nevojë për para hua prej bankës, në periudhë të caktuar, por për shkak të shfrytëzimit të shërbimit të atillë, jeni të detyruar bankës t'i paguani përqindje të caktuar prej sasisë, përkatësisht kamata.

Raportet kreditore ndërmjet borxhliut dhe kreditorit. Në raportet e këtilla është kamata. **Kamata** paraqet sasi përqindje prej shumës së deponuar, përkatësisht prej shumës së huazuar si plotësim parash që borxhliu ia paguan kreditorit, përkatësisht si çmim për shfrytëzimin e shumës së huazuar.

Nëse marrim hua (kredit), atëherë banka është **kreditor,** kurse shfrytëzuesi i huasë është **borxhliu** i cili për shfrytëzimin e mjeteve bankës i paguan kamatë përkatëse. Nëse tani deponojmë mjete në bankë, banka shfrytëzuesit të mjeteve edhe kreditorit u paguan kamatë.

Kamata (interesi) njehsohet në formë të sasisë së përqindjes në çdo 100 njësi parash prej sasisë së huazuar, por dallohet prej përqindjes së zakonshme. Shkaku është në të që gjatë njehsimit të kamatës parasysh merret jo vetëm përqindja, por edhe koha në të cilën mjetet janë huazuar.

Shembuj më të thjeshtë për njehsimin e kamatës janë: deponimet kursyese, kreditimi i qytetarëve dhe sipërmarrjeve, kreditë shpenzuese, si edhe kartelat debitore dhe kreditore.
Nëse kamata njehsohet vetëm në kapitalin e deponuar të të njëjtës shumë të bazës në çdo periudhë të njehsimit të kamatës, atëherë quhet **kamatë e thjeshtë.**

Njehsimi i kamatës së thjeshtë, si edhe madhësitë tjera që paraqiten, prej të cilave ajo varet, quhet **llogaria e kamatës së thjeshtë**. Katër madhësitë themelore të cilat paraqiten gjatë normës së kamatës së thjeshtë janë:

- shuma themelore (kapitali themelor, kryesorja) K
- kamata e njehsuar i
- norma e kamatës (në përqindje) p, përndryshe e barabartë me kamatën për 100 denarë për njësi kohe
- koha për të cilën njehsohet kamata t.

Norma e kamatës shpeshherë jepet për një vit, edhe pse mund të shfrytëzohet edhe norma e kamatës për periudhë më të vogël se një vit: gjysmëviti (semestër), tremujor (kuartal), muaj etj.

Koha për të cilën njehsohet kamata mund të jepet në vite, muaj ose ditë, por me marrëveshje mund të shfrytëzohet se viti ka 365 ditë, kurse muajt numërohen në mënyrë kalendarike, por mundet, për shkak të njehsimit më të thjeshtë ta llogarisim me 360 ditë, kurse muajt me 30 ditë. Kamata mund të njehsohet në fillim të periudhës ose në fund të periudhës, por për atë do të flasim më vonë.

Shpeshherë, do ta shfrytëzojmë konceptin vlera e akumuluar, e cila është shuma themelore e zmadhuar për kamatën e njehsuar (K + i).

1.1.2. Lidhjet themelore ndërmjet madhësive gjatë njehsimit të kamatës së thjeshtë

Në shembujt që vijojnë do t'i ilustrojmë lidhjet ndërmjet madhësive gjatë njehsimit të kamatës së thjeshtë.

1. Sa kamatë do të sjellë kapitali prej 34500 denarë të deponuar në bankë për kohën prej 4 vitesh, me normë të kamatës 8% ?

Gjatë kohës për një vit, për kapitalin prej 34500 denarë, kamata e njehsuar është:

$$\frac{8}{100}\cdot 34500 = 2760 \text{ denarë}$$

Pasi kamata njehsohet në kapitalin themelor, sasia e kamatës për vitin e dytë përsëri është 2760 denarë, por po aq është edhe kamata për çdo vit të ardhshëm. Prej këtu, për kohën prej 4 vite, kamata e njehsuar është katër herë më e madhe se ajo e njehsuara për një vit. Atëherë, kamata e përgjithshme është:

$$i = \frac{8}{100}\cdot 34500\cdot 4 = 11040 \text{ denarë. } \blacklozenge$$

Nëse njehsimin e fundit e shkruajmë me kamatën e njehsuar është:

$$i = \frac{Kp}{100}$$

Për kohën prej një viti, përkatësisht:

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{100}}$$

për kohën prej t vite.

Po ashtu, kamata e thjeshtë, për kohën e dhënë në vite, mund të paraqitet në proporcion themelor, që thotë:

$$\boxed{K : i = 100 : p\cdot t}$$

Prej të cilës lehtë mund të nxirren edhe madhësi tjera te llogaria e kamatës së thjeshtë.

2. Cila shumë do të sjellë kamatë prej 9600 denarë, për kohën prej 8 vitesh, me normën e kamatës prej 5% ?

Duke pasur parasysh proporcionin që i lidh madhësitë themelore, shuma themelore njehsohet sipas formulës:

$$\boxed{K = \frac{100i}{pt}}.$$

Te shembulli konkret, shuma e deponuar është:

$$K = \frac{100 \cdot 9600}{5 \cdot 8} = 24000 \text{ denarë. } \blacklozenge$$

Në mënyrë të ngjashme fitohen formulat për periudhën kohore te e cila njehsohet kamata e thjeshtë, si edhe norma e kamatës. Do t'i nxjerrim formulat përkatëse nëpër shembuj.

3. Sa vjet duhet të deponohet kapitali themelor prej 54000 denarë, për bankën të paguan kamatë prej 6480 denarë, me normë të kamatës prej 6% ?

Prej proporcionit themelor kemi:

$$\boxed{t = \frac{100i}{Kp}}.$$

Atëherë,

$$t = \frac{100 \cdot 6480}{54000 \cdot 6} = 2 \text{ vjet.}$$

4. Njehso normën e kamatës me të cilën borxhi prej 58000 denarë njehsohet kamata prej 8700 denarë, për tre vjet.

Madhësia e panjohur është norma e kamatës p , e cila mundet të njehsohet në pajtim me proporcionin sipas formulës:

$$\boxed{p = \frac{100i}{Kt}}.$$

Në rastin konkret

$$p = \frac{100 \cdot 8700}{58000 \cdot 3} = 5\% . \blacklozenge$$

Në shembujt e deritanishëm, koha për të cilën njehsohet kamata ishte e shprehur në vite, por më së shpeshti periudha e kamatizimit nuk është dhënë me numër të plotë të viteve. Në këtë rast, më së lehti janë ditët ose muajt të shprehen si pjesë e vitit, që të mund të shfrytëzohen paraprakisht lidhjet e nxjerrura te ndërmjet madhësive te kamata e thjeshtë. Kështu, muaji paraqet $\frac{1}{12}$ të vitit, kurse dita $\frac{1}{360}$ ose $\frac{1}{365}$ prej vitit. Nëse koha është dhënë në muaj, për kamatën e njehsuar 365 vlen

$$\boxed{i = \frac{Kp}{100} \cdot \frac{t}{12}},$$

duke pasur parasysh se t –muaj paraqesin $\frac{t}{12}$ prej vitit.

Proporcioni themelor i dhënë në muaj thotë:

$$\boxed{K : i = 1200 : pt}.$$

Deri sa koha është dhënë në ditë, e shfrytëzojmë formulën:

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{36000}}$$

ose

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{36500}},$$

varësisht prej marrëveshjes se vitin a e llogarisim në mënyrë kalendarike me 365 ditë (shkruajmë (k,365)) ose me matricë kohore (30,360) përkatësisht 12 muaj nga 30 ditë. Pikërisht, koha t të dhënë në ditë, paraqet $\frac{t}{365}$, përkatësisht pjesë prej $\frac{t}{360}$ të vitit. Proporcionet themelore përkatëse për njehsimin e madhësive tjera janë

$$\boxed{K : i = 36500 : pt}$$

ose

$$\boxed{K : i = 36000 : pt}.$$

Vërejtje. Shfrytëzohet edhe shënimi ((k,360), kur ditët numërohen në mënyrë kalendarike, kurse viti me 360 ditë.

5. Sa kamatë do të paguhet për kapitalin themelor prej 240000 denarë për 8 muaj, me normë kamate prej 6% ?

Prej kushteve të dhëna te detyra kemi K = 240000, t=8 muaj, p = 6%. Atëherë

$$i = \frac{Kpt}{1200} = \frac{240000 \cdot 6 \cdot 8}{1200} = 9600$$

6. Me cilën normë të kamatës, kapitali themelor prej 1620000 denarë, do të sjellë kamatë prej 21304 denarë për periudhën prej 60 ditë? Kohën e masim në mënyrë kalendarike.

Madhësitë e njohura janë: K=1620000, i=21304 dhe t = 60 ditë. atëherë $i = \frac{Kpt}{36500}$, përkatësisht

$$p = \frac{36500 \cdot i}{Kt} = \frac{36500 \cdot 21304}{1620000 \cdot 60} = 8\% . \blacklozenge$$

7. Sa është shuma e deponuar në bankë në periudhën prej 23 maj deri në 16 shtator të këtij viti, nëse kamata e njehsuar është 4576 denarë, me normën e kamatës prej 4%? Kohën e masim në mënyrë kalendarike (k ,365).

Së pari duhet të numërohen ditët dhe atë, nëse e numërojmë ditën e parë prej periudhës nuk e marrim parasysh ditën e fundit, përkatësisht nëse nuk e njehsojmë të parën, atëherë e njehsojmë ditën e fundit prej periudhës. Në çdo rast, nuk numërohen edhe dita e parë dhe e fundit.

Në rastin tonë, do të llogarisim se dita e parë për kamatizim është 24 maj, por atëherë kemi gjithsej 8 ditë prej muajit të majit, 30 ditë prej qershorit, pra 31 ditë prej korrikut dhe gushtit, por pasi i numërojmë ditën e fundit kemi 16 ditë prej muajit qershor, përkatësisht gjithsej $t = 8 + 30 + 31 + 31 + 16 = 116$ ditë. Në pajtim me formulën, për madhësinë e panjohur

$$K = \frac{36500 \cdot i}{pt} = \frac{36500 \cdot 4576}{4 \cdot 116} = 360000 \text{ denarë.}$$

Domethënë, shuma e deponuar është shuma prej 360000 denarë deri më 23 maj. ◆

8. Fituesi në turnir në pingpong, e ka deponuar shumën e fituar prej 125000 denarë, në dy banka të ndryshme. Banka e parë ka njehsuar kamatë me 7% , kurse e dyta me 5% . Pas një viti, kamata e njehsuar prej të dy bankave është gjithsej 7850 denarë. Sa sasi janë deponuar në të dy bankat në veçanti?

Është e njohur shuma e deponuar $K = 125000$, që është shumë e dy deponimeve të veçanta $K_1 = x$ dhe $K_2 = 125000 - x$. Normat e kamatave janë $p_1 = 7\%$, $p_2 = 5\%$, me kamatën e përgjithshme $i = i_1 + i_2 = 7850$. Atëherë sipas kushteve, mund të parashtrojmë barazim:

$$i = \frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100},$$

ku $t_1 = t_2 = 1$ vit. Prej këtu,

$$7850 = \frac{7x}{100} + \frac{5(125000 - x)}{100},$$

përkatësisht

$$785000 = 5 \cdot 125000 + 2x ,$$

$785000 = 5 \cdot 125000 + 2x$, prej ku vijon $K_1 = x = 80000$ denarë dhe $K_2 = 45000$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Sa kamatë njehsohet me 25000 denrë me normën e kamatës 15% për kohën prej:

a) 5 vjet; b) 3 muaj; c) 25 ditë nga (30,360) dhe (k,365).

2. Sa vjet duhet të jetë deponuar shuma K, që me normën e kamatës së thjeshtë prej 5% , kamata e ngjeshur është sa edhe shuma e deponuar? (Vërejtje. $K = I_p$)

3. Njehso normën e kamatës me të cilën për shumën prej 34500 denarë, është njehsuar kamata prej 6900 denarë, për 4 vjet?

4. Për cilën shumë të deponuar njehsohet kamata prej 3540 denarë, gjatë normës së kamatës prej 6% për:

a) 4 vjet; b) 8 muaj.

5*. Në bankë janë deponuar dy shuma themelore të ndryshme të cilat dallohen për 12000 denarë. Shuma më e madhe e deponuar në një vit, me 4% normë të kamatës, por më e vogla në 10 muaj, me 6% normë të kamatës. Njehso shumën e përgjithshme të deponuar, nëse kamatat e njehsuara, për të dy shumat në veçanti janë të barabarta.

6*. Njehso sa kamatë të përgjithshme, me normë të kamatës prej 6,5%, do të sjellin këto shuma: 38000 denarë të deponuara në periudhën 31.01 - 30.06, 72600 denarë në periudhën 8.03 -30.06 dhe 18900 denarë të deponuara në periudhën 1.05 - 30.06, në të njëjtin vit kalendarik?

1. 2. Llogaria e kamatës mbi njëqind dhe nën njëqind

Shpesh, kur flitet për borxhet dhe kamatat e njehsuara, si edhe deponimet e kamatave të kursyera, nuk shqyrtohen në veçanti madhësitë prej proporcionit për llogari të thjeshtë të kamatës, por nga aspekti praktik flitet për shumën themelore për kamatën e njehsuar ose shuma e zvogëluar për kamatën e njehsuar.

Nëse dihet shuma themelore e zmadhuar për kamatën $K + i$ atëherë, flasim për **llogarinë e thjeshtë të kamatës mbi njëdind,** por e zbatojmë për të caktuar K dhe i . Nëse tani, duke shfrytëzuar shumën të zvogëluar për kamatën e zvogëluar, $K - i$, i caktojmë K dhe i, flasim për **llogarinë e kamatës së thjeshtë nën një qind.** Edhe këtu, gjatë njehsimit të periudhës kohore të kamatizimit mund të jetë dhënë në vit, muaj ose ditë.

Proporcioni themelor për llogarinë e kamatës së thjeshtë është dhënë me $K : i = 100 : pt$. Duke u shprehur për kamatën e njehsuar $i = \frac{Kpt}{100}$ dhe duke shtuar shumën themelore, për shumën e akumuluar kemi:

$$K + i = K + \frac{Kpt}{100} = K\left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

Atëherë,

$$\frac{K+i}{K}=1+\frac{pt}{100}=\frac{100+pt}{100},$$

prej ku mund të shkruajmë proporcion të ri në formën:

$$\boxed{(K+i):(100+pt)=K:100} \qquad (1)$$

Gjithashtu, nëse proporcionin themelor e rregullojmë në formën K : 100 = i: pt, atëherë fitojmë edhe një proporcion që e lidh shumën e akumuluar me madhësitë tjera te llogaria e thjeshtë e kamatës

$$\boxed{(K+i):(100+pt)=i:pt}. \qquad (2)$$

Nëse në mënyrë të ngjashëm e kërkojmë shumën e zvogëluar K - i, fitojmë:

$$K-i=K-\frac{Kpt}{100}=K\left(1-\frac{pt}{100}\right)=K\frac{100-pt}{100}.$$

Prej këtu, mund ta shkruajmë proporcionin:

$$\boxed{(K-i):(100-pt)=K:100} \qquad (3)$$

Dhe përsëri me zëvendësimin e raportit K : 100 prej proporcionit themelor, kemi:

$$\boxed{(K-i):(100-pt)=i:pt}. \qquad (4)$$

Për shkak të ngjashmërisë së proporcioneve, mund të lidhen në formën:

$$\boxed{(K\pm i):(100\pm pt)=K:100}$$

ose

$$\boxed{(K\pm i):(100\pm pt)=i:pt}.$$

Të njëjtat këto proporcione, mund të nxirren edhe me zbatimin e vetive të njohura për raportin prej shumës ose ndryshimit të anëtarëve të majtë dhe shumës ose ndryshimit të anëtarëve të djathtë të raportit, por njëkohësisht është i barabartë edhe me raportin e anëtarëve të dytë të raportit të majtë dhe të djathtë prej proporcionit të njëjtë.

Prej proporcioneve të reja të nxjerra, mund të nxirren formula për njehsimin e shumës themelore dhe kamata te llogaritë mbi dhe nën një qind

$$\boxed{K=\frac{(K\pm i)\cdot 100}{100\pm pt}} \text{ dhe } \boxed{i=\frac{(K\pm i)\cdot pt}{100\pm pt}}.$$

1. Borxhli i kreditorit i kthen borxhin prej 57120 denarë, sasi te e cila është përfshirë edhe kamata e njehsuar me normë të kamatës 6%, për periudhën prej dy vitesh. Sa është borxhi, por sa është kamata?

Dihet sasia $K+i=57120$ denarë. Atëherë shuma themelore në pajtim

Formula është $K=\frac{(K+i)\cdot 100}{100+pt}$, ku p = 6%, t = 2. Shuma themelore është 100 + pt

$$K=\frac{57120\cdot 100}{100+6\cdot 2}=\frac{5712000}{112}=51000 \text{ denarë.}$$

Domethënë, pjesa kryesore e borxhit është 51000 denarë, kurse e kamatës zvogëlohet, 57120 - 51000 = 6120 denarë. ◆

2. Pas zbritjes së 8% kamatë për 6 muaj, banka ka paguar 52800 denarë. Sa është borxhi, por sa është kamata?

Duke pasur parasysh se kamata i është e zbritur në fillim, kjo do të thotë se shuma themelore është tanimë e zvogëluar për kamatën, pra borxhliu duhet të kthen edhe K - i denarë bankës, aq sa ka ngritur. Atëherë K - i = 52800 denarë, t = 6 muaj, p = 8%. Ekzistojnë dy mënyra që njehsohet shuma themelore, të njehsohet koha në vite, përkatësisht $t=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, ose të nxirren formulat përkatëse për llogarinë nën njëqind dhe mbi njëqind, në rastet kur koha njehsohet në muaj ose ditë. Direkt, prej formulës së njohur fitojmë

$$K=\frac{(K-i)\cdot 100}{100-pt}=\frac{52800\cdot 100}{100-8\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5280000}{96}=55000 \text{ denarë,}$$

Kurse kamata

$$i=\frac{(K-i)\cdot pt}{100-pt}=\frac{52800\cdot 8\cdot\frac{1}{2}}{100-8\cdot\frac{1}{2}}=\frac{211200}{96}=2200 \text{ denarë}$$

(ose i = K - (K - i) = 55000 - 52800 = 2200 denarë). ◆

Nëse shfrytëzojmë proporcione të gatshme për njehsim, kur koha është dhënë në muaj, prej $K : i = 1200 : pt$ kemi:

$$\boxed{(K\pm i):(1200\pm pt)=K:1200}$$

dhe

$$\boxed{(K\pm i):(1200\pm pt)=i:pt}.$$

Prej K : i = 36500: pt ose (K + i): (1200 + pt) = K :1200, K : i = 36000: pt, duke shfrytëzuar vetitë e proporcioneve fitojmë:

$$\boxed{(K\pm i):(36500\pm pt)=K:36500}$$
$$\boxed{(K\pm i):(36500\pm pt)=i:pt}$$

dhe përkatësisht

$$\boxed{(K\pm i):(36000\pm pt)=K:36000}$$
$$\boxed{(K\pm i):(36000\pm pt)=i:pt},$$

për rastet kur shfrytëzojmë matrica kohore (k,365) dhe (30,360),për periudhën e kamatizimit të shprehur në ditë.

3. Personi ka ngritur edhe nga 9 muaj, së bashku me 11% kamatë, ka kthyer 541250 denarë. Sa është krediti, por sa kamata e njehsuar?

Duke shfrytëzuar proporcionin për shumën e akumuluar $K + i$, kur koha është shprehur në muaj, $(K + i): (200 + pt) = K : 1200$, për shumën themelore kemi

$$K = \frac{(K+i)\cdot 1200}{1200 + pt} = \frac{541250\cdot 1200}{1200 + 11\cdot 9} = 500000 \text{ denarë},$$

kurse për kamatën e njehsuar vlen

$i = (K + i) - K = 541250 - 500000 = 41250$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Sqaro çka është llogaria e kamatës mbi njëqind, por çka është llogaria e kamatës nën njëqind.

2. Pas zbritjes së 30% kamatës për 200 ditë, për sa duhet të kthehet huaja, nëse borxhliu ka fituar 60000 . Sa është kamata, por sa gjithsej mjete duhet të kthehen? Shfrytëzo matricën kohore (30,360).

3. Personi ka bërë marrëveshje për kredit prej tre muajsh, me 20% normë të kamatës, ku banka e ka mbajtur kamatën dhe ka paguar 33440 denarë. Në çfarë shume është bërë marrëveshja për kredit dhe sa është kamata e njehsuar? Shfrytëzo matricën kohore (30,360).

4. Personit duhet t'i paguhen 35000, përkatësisht 50000 denarë, për 3, përkatësisht për 5 vjet. Norma e kamatës është 5% vjetore. Sa shumë të përgjithshme duhet të deponohet që pas kamatizimit të fitohen shumat e nevojshme?

5*. Së bashku me 3,2% kamatë për periudhën 10.08 -30.09, (30,360),borxhliu ka kthye 33900 denarë. Të njehsohet borxhi dhe kamata.

6. Së bashku me 12,5% kamata, për dy vjet, borxhliu ka kthyer 325500 denarë. Sa është borxhi, dhe sa është kamata e njehsuar?

7. Pas zbritjes prej 9% kamata për kohën prej 25.01 deri 31.08, janë pranuar 10000 denarë. Sa është borxhi, dhe sa është kamata e njehsuar, nëse matrica kohore është $(K,365)$?

1. 3. Llogaria me termin

Kur borxhliu ka më tepër shuma për të kthye, me sasi të ndryshme, me afate të ndryshme për pagesë dhe norma të ndryshme të kamatës, parashtrohet pyetja a është e mundshme dhe si të paguhen borxhet menjëherë, por asnjëra anë, as kreditori as borxhliu, të mos jenë të dëmtuar. Pyetja mund të shqyrtohet nga aspekti i asaj kush është afati mesatar i kthimit të borxheve, që do të jetë norma e kamatës mesatare, sa është sasia e borxhit në momentin. Kur kthehet borxhi.

Në princip kjo do të thotë se shuma e kamatës së pjesëve të veçanta duhet të jetë e barabartë me kamatën e njehsuar për borxhin e përgjithshëm për kohën mesatare, me normën e kamatës mesatare. Mënyra e konstatimit të afatit mesatar dhe norma mesatare quhet **llogaria me termin** dhe paraqet një zbatim të normës së kamatës së thjeshtë. **Afati mesatar** quhet koha për të cilën mundet të paguhet menjëherë më tepër shuma të borxheve, në vend të shumave të njëjta të paguhen në afate të ndryshme. **Afati i saldos të borxhit** është afati në të cilin mund të paguhet ndryshimi ndërmjet borxhit dhe kërkesat, në situatën në të cilin përveç kësaj që ka borxh, personi është edhe kreditor për disa borxhli.

1.3.1. Njehsimi i afatit mesatar

Obligimet e borxhlinjve le të jenë borxhe me sasi $K_1, K_2, \ldots, K_n$, me norma të kamatës $p_1, p_2, \ldots, p_n$, përkatësisht, ku borxhet kanë sukses për periudha kohore.

Te formulat, koha t_k, $k = 1,2,\ldots, n$, mund të jetë në cilëndo njësi matëse, por bankat më së shpeshti i shprehin në ditë.

Borxhliu dëshiron t'i paguaj të gjitha borxhet menjëherë, në afat mesatar t_s dhe me normë të kamatës mesatare p_s. Për njehsime të zakonshme, koha le të jetë dhënë në vite. Obligimet e përgjithshme të borxhliut në emër të kamatës janë:

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{100}.$$

Kjo sasi duhet të jetë e barabartë me shumën e kamatave për borxhet e veçanta, në afatin mesatar të borxheve, por me normë të kamatës mesatare, në afatin mesatar, në afatin mesatar të pagesës së borxhit.

$$\frac{K_1 p_s t_s}{100} + \frac{K_2 p_s t_s}{100} + \ldots + \frac{K_n p_s t_s}{100}.$$

Në këtë situatë nuk ka të dëmtuar, shumat themelore të borxheve janë të barabarta, por edhe kamatat e njehsuara në total (akumulative), gjithashtu janë të barabarta. Domethënë,

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{100} = \frac{K_1 p_s t_s}{100} + \frac{K_2 p_s t_s}{100} + \ldots + \frac{K_n p_s t_s}{100},$$

përkatësisht

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n = p_s t_s (K_1 + K_2 + \ldots + K_n).$$

Prej këtu, nëse e dimë me cilën normë të kamatës mesatare do të kamatizojmë, mundemi ta njehsojmë afatin mesatar për kthimin e borxhit, përkatësisht e fitojmë kohën për kthimin e borxhit të përgjithshëm,

$$\boxed{t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{p_s (K_1 + K_2 + \ldots + K_n)}}.$$

Norma e kamatës mesatare, njehsohet kur shumat, normat dhe koha janë të ndryshme

$$\boxed{p_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{t_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}}.$$

Ta shqyrtojmë kamatën e njehsuar për borxhet e veçanta dhe borxhin e përgjithshëm, të një periudhe të njëjtë kohore. Për këtë qëllim, te formula paraprake zëvendësojmë

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t_s$$

dhe fitojmë::

$$\boxed{p_s = \frac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}}.$$

Do ta zëvendësojmë kamatën mesatare të njehsuar te formulat për afatin mesatar dhe kemi:

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{\frac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)},$$

përkatësisht

$$\boxed{t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{K_1 p_1 + K_2 p_2 + \ldots + K_n p_n}}.$$

Shpeshherë, disa prej madhësive në njehsimet janë të barabarta. Kështu:

- nëse janë të barabarta shumat themelore $K_1 = K_2 = \ldots = K_n = K$, për afatin mesatar dhe normën e kamatës mesatare kemi:

$$t_s = \frac{K\left(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n\right)}{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)} = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

dhe

$$p_s = \frac{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)}{nK} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n};$$

– nëse janë të barabarta normat e kamatave $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, për afatin mesatar kemi

$$t_s = \frac{p\left(K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n\right)}{p\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)} = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n},$$

kurse për normën e kamatës mesatare kemi $p = p$.

- nëse janë të barabarta edhe shumat themelore dhe normat e kamatave, atëherë $p = p$ dhe

$$t_s = \frac{K\left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n\right)}{nK} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}.$$

Afati i pagesës (data e pagesës), më së shpeshti përcaktohet me shtimin e afatit mesatar të njehsuar të kohës së parë të pagesës. Atëherë edhe njehsimi i kohërave të pagesës. Atëherë edhe njehsimi i kohërave të pagesës së borxheve të veçanta kryhet me kohën e parë të pagesës.

Nëse barazimi për të barazuar shumën e kamatave të njehsuara për afatin mesatar, e shkruajmë në rastin kur koha është dhënë në ditë, kemi:

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500}+\frac{K_2 p_2 t_2}{36500}+\ldots+\frac{K_n p_n t_n}{36500}=\frac{K_1 p_s t_s}{36500}+\frac{K_2 p_s t_s}{36500}+\ldots+\frac{K_n p_s t_s}{36500},$$

përkatësisht përsëri fitohet barazimi:

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n = p_s t_s (K_1 + K_2 + \ldots + K_n).$$

Kjo tregon se njehsimi kryhet sipas formulave të njëjta, pavarësisht se si e llogarisim kohën, në vite, muaj ose ditë, por me siguri të gjitha kohërat e pagesës duhet të shprehura në të njëjtën njësi matëse.

1. Borxhliu duhet të paguan 30000 denarë në katër këste të barabarta dhe atë pagesa e parë pas 30 ditë, e dyta pas 60 ditë, e treta pas 90 ditë dhe kësti e fundit pas 120 ditë, prej tani. Për sa ditë mund të paguhet tërë borxhi menjëherë, nëse norma e kamatës është 8% ?

Pasi pagesa është në këste të barabarta, shumat K_1, K_2, K_3 dhe K_4 janë të barabarta, norma e kamatës është e barabartë për të gjitha pagesat $p = 8\%$, kurse për kohën për pagesën në veçanti vlen $t_1 = 30$, $t_2 = 60$, $t_3 = 90$ dhe $t_4 = 120$. E njehsojmë afatin mesatar për këtë rast special

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{30 + 60 + 90 + 120}{4} = 75 \text{ ditë.}$$

Kjo do të thotë se pagesa prej 30000 denarë mund të kthehen tërësisht për 75 ditë prej tani, me kamatë 8% .◆

Data e pagesës në lidhje me të cilën numërohet koha për njehsimet në llogarinë me termin. Për epokën nuk duhet patjetër të zgjidhet koha e parë. Do të shqyrtojmë shembull në të cilin kryhen njehsimet në lidhje me dy epoka të ndryshme.

2. Borxhliu duhet ta paguajë borxhin e tij prej 60000 denarë, me normë të kamatës prej 16% në katër këste të barabarta dhe atë: e para në 15.02, e dyta në 7.03, e treta në 5.04 dhe e katërta në 1.05 , të njëjtin vit. Në cilën datë borxhliu mund ta paguan tërë borxhin, nëse:

a) epoka është 15.02; b) epoka është 7.03 ?

Në rastin kur kohën fillojmë ta llogarisim prej 15.02 (rasti nën a)), koha e pagesës në këstin e parë është $t_1 = 0$. Për këstin e dytë, koha e pagesës është periudha prej 15.02 deri 7.03 (duke mos llogaritur 15.02, por duke përfshirë 7.03) është $t_2 = 20$ ditë. Përkatësisht, $t_3 = 49$ (13 ditë prej shkurtit, 31 ditë prej marsit dhe 5 ditë të prillit) dhe $t_4 = 75$ (prej 15.02 deri 1.05). Duke pasur parasysh atë se shumat themelore dhe norma e kamatës janë të barabarta, për afatin mesatar kemi:

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{0 + 20 + 49 + 75}{4} = 36 \text{ ditë.}$$

Data e pagesës së tërë borxhit është 36 ditë prej ditës kur fillon të numëron, përkatësisht prej 15.02, kurse kjo është 23.03.

Nëse për epokën e zgjedhim ditën 7.03 (rasti nën b)), atëherë pagesën e parë e numërojmë prapa 7.03 deri 15.02, përkatësisht tani $t_2 = 0$ kurse $t_1 = -20$. Më tutje, $t_3 = 29$ (prej 7.03 deri 5.04) dhe $t_3 = 55$ (prej 7.03 deri 1.05). Afati i shkurtër është:

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{-20 + 0 + 29 + 55}{4} = 16 \text{ ditë,}$$

Që nuk sjell deri te data 23.03. ♦

Kjo tregon se pa dallim të periudhës së zgjedhur dhe afatet mesatare të ndryshme, data e pagesës së borxhit është i njëjtë.

3. Shoqata tregtare duhet të paguan 100000 denarë në katër këste të barabartë dhe atë:
- kësti e parë për 100 ditë prej tani me kamatë 3%;
- kësti e dytë për 150 ditë, me kamatë 4% ;
- të tretë 25000 denarë, për 200 ditë, me kamatë 6% ;
- kësti e katërt për 300 ditë, me kamatë 7% .

Pas sa ditë dhe me cilën normë të kamatës mesatare, mund të paguhen të gjitha katër borxhet menjëherë, por të mos ketë palë të dëmshme?

Detyrën thjesht do ta zgjidhim kur do t'i radhisim vlerat në tabelë, në të cilat njëkohësisht edhe mbledhja është e thjeshtësuar.

	K_i - shuma	t_i - ditë	p_i –norma	$P_i \cdot t_t$
1	25000	100	3	300
2	25000	150	4	600
3	25000	200	6	1200
4	25000	300	7	2100
Shuma	100000		20	4200

Norma mesatare është $p_s = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} = \frac{3 + 4 + 6 + 7}{4} = 15\%$ dhe

$$t_s = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 + p_4 t_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{300 + 600 + 1200 + 2100}{20} = \frac{4200}{20} = 210 \text{ ditë.}$$

Norma mesatare është 100000 denarë duhet të kthehet për saktë 210 ditë, me kamatë 5%, përkatësisht për 210 ditë shoqata tregtare duhet të kthen

$$100000+\frac{100000\cdot 5\cdot 210}{36000}=102917 \text{ denarë.} \blacklozenge$$

4. Tregtar, prej të njëjtës bankë, ka marrë tre kredi, por të gjithë me kushte të ndryshme. Borxhi i tij përbëhet në kthimin e

- 20000 denarë në 7.05 me 4% kamatë;
- 40000 denarë në 6.06 me 5% kamatë;
- 50000 denarë në 5.08 me 6% kamatë.

Në cilën datë dhe me cilën normë të kamatës mesatare, tregtari mund t'i kthen të tre shumat menjëherë, pa qenë i dëmtuar?

Nëse për datë të fillimit e zgjedhim 7.05, atëherë $t_1 = 0$, $t_2 = 30$ ditë (prej 7.05 deri 6.06), $t_3 = 90$ ditë (prej 7.05 deri 5.08). Te tabela i fusim të dhënat dhe prodhimet të cilat paraqiten në formulat për njehsimin e afatit mesatar.

	K_i - shuma	t_i - ditë	p_i –norma	$K_i p_i$	$K_i p_i t_i$
1	20000	0	4	80000	
2	40000	30	5	200000	6000000
3	50000	90	6	300000	27000000
Shuma	110000			580000	33000000

Kemi $p_s=\frac{K_1p_1+K_2p_2+K_3p_3}{K_1+K_2+.K_3}=\frac{580000}{110000}=5{,}27\%$ dhe

$$t_s=\frac{K_1p_1t_1+K_2p_2t_2+K_3p_3t_3}{K_1p_1+K_2p_2+K_3p_3}=\frac{33000000}{580000}\approx 57 \text{ ditë.}$$

Borxhi i përgjithshëm mundet menjëherë të kthehet me kamatë 5,27% për 57 ditë, më saktë 3.07 . ♦

Detyra për punë të pavarur

1. Çka është llogaritë me termin?

2. Cila kohë quhet afati mesatar?

3. Cili afat quhet afati i saldos së borxhit?

4. Sipërmarrja u ka borxh për energjinë elektrike, pra kanë bërë marrëveshje për pagesën në pesë këste të barabarta nga 80000 denarë, me normën e kamatës 9% dhe atë: kësti e parë nga 30 ditë e dyta nga 50 ditë, kësti i tretë nga 80 ditë, e katërta nga 100 ditë dhe kësti i fundit nga 115 ditë. Në cilin interval mund të paguhet tërë borxhi menjëherë?

5. Borxhliu duhet të paguan 300000 denarë, dhe atë 25% menjëherë, 10% pas dy muajve, 35% pas shtatë muaj dhe të tjerët 30% pas dhjetë muaj. Pas sa kohe mund të paguhen të gjitha shumat menjëherë?

6. Borxh prej 1800000 denarë duhet të kthehet në katër këste të barabarta me 20% norma e kamatës dhe atë:

- kësti i parë në 15.03 ;
- kësti i dytë në 21.04 ;
- kësti i tretë në 10.05 ;
- kësti i katërt në 30.06.

Në cilën datë tërë borxhi mund të paguhet menjëherë, nëse data e startimit është:

a) 15.03; b) 21.04.

7. Tregtari me shërbyesin e tij duhet të paguan tre mallrave, dhe atë:

- 60000 denarë me 6% në 3.04;
- 80000 denarë me 6% në 24.04 ;
- 100000 denarë me 6% në 26.05 .

Në cilën datë tregtari duhet të paguan furnizimet që asnjëri tregtar të mos dëmtohet?

8. Borxhliu duhet të paguan 80000 denarë në 3.03, 30000 në 8.04, 60000 denarë në 18.05 , 30000 denarë në 23.07 , të gjithë me 10% norma e kamatës. Në cilën datë mundet të paguhet tërë borxhi?

9. Tregtari duhet të paguan prifakturat prej furnizuesit të tij dhe atë sasitë prej nga 45000 denarë, me normën e kamatës 6% në 10.04, 28.04, 20.05 dhe 30.05 . Në cilën ditë tregtari mundet menjëherë ta paguan borxhin?

1. 4. Njehsimi i afatit të saldos së borxhit

Në këtë pjesë do të japim përgjigje në pyetjen kur borxhliu mund të rregullon të gjitha obligimet e tij, nëse njëkohësisht i ka borxh dhe kërkon. Afati kohor i këtillë quhet afati i saldos së borxhit.

Le të jetë $K_1, K_2, ..., K_n$ janë obligimet e borxhit sipas $t_1, t_2, ..., t_n$ ditë, pa norma të kamatës $p_1, p_2, ..., p_n$. Kërkesat e tyre le të jenë $P_1, P_2, ..., P_m$, me afat sipas $t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0$ ditë, me norma të kamatës $p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0$. Ideja është të konstatohet afati i saldos t_s, norma e kamatës (mesatare) p_s është mesi i saldos së borxhit gjatë S, nëse dimë se shuma e kamatave të borxhit të jetë i barabartë me shumën e kamatave të kërkuesve dhe kamata e saldos. Po ashtu, me supozim se borxhet janë më të mëdha prej kërkesave, $K_1 + K_2 + \ldots + K_n > P_1 + P_2 + \ldots + P_m$, saldo e borxhit S është shuma e cila duhet të paguhet që të mbulohet borxhi, përkatësisht

$$\boxed{S = (K_1 + K_2 + \ldots + K_n) - (P_1 + P_2 + \ldots + P_m)}.$$

Kamata e përgjithshme për borxhet është

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{36500}.$$

Kamata e përgjithshme për kërkesat është

$$\frac{P_1 p_1^0 t_1^0}{36500} + \frac{P_2 p_2^0 t_2^0}{36500} + \ldots + \frac{P_m p_m^0 t_m^0}{36500},$$

Kurse kamata e njehsuar për saldon e borxhit është $\frac{S p_s t_s}{36500}$.

Atëherë

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{36500} = \frac{P_1 p_1^0 t_1^0}{36500} + \frac{P_2 p_2^0 t_2^0}{36500} + \ldots + \frac{P_m p_m^0 t_m^0}{36500} + \frac{S p_s t_s}{36500}.$$

Pa dallim në cilën njësi matëse është shprehur koha, barazimi prej të cilës do ta caktojmë afatin e saldos të borxhit është

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n = P_1 p_1^0 t_1^0 + P_2 p_2^0 t_2^0 + \ldots + P_m p_m^0 t_m^0 + S p_s t_s,$$

përkatësisht

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n - (P_1 p_1^0 t_1^0 + P_2 p_2^0 t_2^0 + \ldots + P_m p_m^0 t_m^0)}{S p_s}.$$

Në mënyrë speciale, nëse normat e kamatës janë të barabarta edhe për borxhet dhe kërkesat, $p_1 = \ldots = p_n = p_1^0 = \ldots = p_m^0 = p_s$, kemi

$$t_s = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n - (P_1 t_1^0 + P_2 t_2^0 + \ldots + P_m t_m^0)}{S}.$$

1. Organizata Polarino i ka borxh 5000 denarë për 40 ditë, 6000 denarë për 50 ditë, 8000 denarë për 80 ditë, kurse kërkon 3000 denarë për 30 ditë dhe10000 denarë për 90 ditë. Nga sa ditë mund të paguhet mbetja i borxhit? Norma e kamatës është e barabartë me tërë periudhën

Do t'i fusim të dhënat në tabelë, ngjashëm sikurse gjatë caktimit të afatit mesatar të pagesës, por edhe për borxhet edhe për kërkesat:

Borxhi				Kërkesat			
	K_i	t_t	$K_i t_i$		P_J	t_j^0.	$P_j t_j^0$
1	5000	40	200000	1	3000	30	90000
2	6000	50	300000	2	10000	90	900000
3	8000	80	640000				
Shuma	19000		1140000		13000		990000

Saldo e borxhit është

$$S = (K_1 + K_2 + K_3) - (P_1 + P_2) = 19000 - 13000 = 6000 \text{ denarë.}$$

Afati i saldos është

$$t_s = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + K_3 t_3 - \left(P_1 t_1^{\,0} + P_2 t_2^{\,0}\right)}{S} = \frac{1140000 - 990000}{6000} = 25 \text{ ditë}$$

Pagesa e tërësishme e borxhit duhet të bëhet me pagesë të 6000 denarë, të kamatizuara për të njëjtën normë të kamatës, për 25 ditë prej tani. ◆

Vërejtje. Deri më tani supozojmë se borxhi është më i madh se kërkesat. Por, mund të ndodh edhe borxhi të jetë më i vogël se kërkesat, situata në të cilën saldoja, gjatë barazimeve të dhëna do të fiton shenjë negative, që do të thotë se do t'i ngelin borxhliut me kamatën e njehsuar.

Detyra për punë të pavarur

1. Cila është ideja për futjen e konceptit afati i saldos së borxhit?

2. Sipërmarrja ka borxh 75000 denarë për tre muaj, 40000 denarë për gjashtë muaj dhe 80000 denarë për tetë muaj. Njëkohësisht kërkon 55000 denarë për shtatë muaj dhe 30000 denarë për nëntë maj. Në cilin afat mund të paguhet tërë borxhi?

3. Sipërmarrja ka borxh 80000 denarë në 5.04, 150000 denarë në 20.05, 275000 denarë në 30.06 , kurse kërkon 130000 denarë në 17.03 dhe 90000 denarë në 5.08 . Në cilën datë mund të paguan saldon e borxhit, nëse periudha është 5.04?

4. Borxhliu duhet të kthen 1000 denarë në 4.03 , 2000 denarë në 25.04 dhe 3000 denarë në 15.05 . Njëkohësisht kërkon 1500 denarë në 17.04 dhe 1000 denarë në 1.09. Në cilën datë mund të paguhet saldoja e borxhit dhe sa është sasia e përgjithshme që borxhliu do t'ia paguan kreditorit?

a) periudha 4.03 ; b) periudha 17.02.

5. Tregtari duhet të paguan borxhe ndaj furnizuesit të tij dhe atë nga 45000 denarë, me normën e kamatës 6%, në 10.04, 28.04, 20.05 dhe 30.05 . Njëkohësisht kërkon nga 30000 denarë në 15.04 dhe 25.05 . Cilën ditë mund të paguhet saldoja e borxhit?

1. 5. Koncepti për çmimin diskont dhe njehsimet e diskontit

Në kushte ekonomike paraqiten raste kur sasi e caktuar e parave, të gjeneruar në bazë të instrumenteve të caktuara financiare (tatimpagues, çeqe, fatura, etj.) për periudhën kohore të determinuar paguhen para kohe (para afatit të pagesës së instrumentit). Karakteristike për këtë lloj të rasteve është njehsimi i pjesës së kamatës, për të cilin duhet të zvogëlohet shuma e fundit që e ka borxh, të njohur si diskont. Përkatësisht, gjatë pagesës para kohe të obligimit të dhënë nominal, që duhet të paguhet në datën e caktuar në të ardhmen, shuma për të cilën zvogëlohet obligimi nominal në momentin kur para afatit bëhet pagesa borxhit, quhet **diskont.**

Mënyra e konversionit të një obligimi që duhet të paguhet me obligim në datën e caktuar, e cila para kohe paguhet në datën e caktuar (determinimi i vlerës së tanishme të flukseve të ardhshme monetare) quhet diskontim (eskontim).

Gjatë realizimit të njehsimeve të diskontit shfrytëzohen këto parametra:

$N=$	vlera nominale e cila është instrumenti financiar.
$t,n,n=$	afati i diskontit (diskont), i cili është i barabartë me kohën të shprehur në numër të ditëve - t, muaj - m, vite - n, prej ditës së diskontimit të instrumentit, deri ditën e pagesës së instrumenteve. Ditët e muajit llogariten në mënyrë kalendarike, kështu që nuk llogaritet dita kur është sjellur instrumenti i eskontit, por njehsohet dita e pagesës së instrumenti.
$D=$	diskont (eskont), i cii është i barabartë me shumën për të cilën zvogëlohet vlera nominale e instrumentit financiar.
$p=$	norma e kamatës (norma e diskontit) sipas të cilës është njehsuar diskonti.
$E=$	shuma reale (efektive) me të cilën paguhet obligimi nominal në momentin e pagesës para kohe.

Megë, njehsimi i diskontit, kryhet në dy mënyra, ekzistojnë dy lloje të diskonteve:

- diskonti komercial (bankar, tregtar) - *Dk,* te të cilët për bazë të njehsimit të diskontit merret vlera nominale, kurse vlera efektive fitohet si ndryshim i vlerës nominale dhe të diskonit dhe

- diskonti racional (matematik) - Dr, te i cili vlera nominale fitohet si shumë e vlerës nominale dhe kamatës përkatëse, e cila njehsohet për vlerën efektive.

Gjatë diskontimit, banka në bazë të vlerës nominale njehson provizion të caktuar dhe pagesë plotësuese dhe shpenzime manipulative. (provizioni dhe shpenzimet manipulative zbriten prej vlerës efektive).

1.5.1. Karakteristikat e faturës

Fatura (bill of exchange) është një dokument në formën e shkruar ku një person i jep urdhër personit tjetër në kohën e caktuar dhe në vendin e caktuar t'ia paguan shumën e shënuar të parave te fatura e personit të shënuar në vet faturën të cilit i është dhënë si urdhër. Pikërisht, fatura paraqet letër prej vlere sipas urdhrit dhe emitentit të tij (trasang) jep urdhër pa kusht personit tjetër (trasat), të paguhet sasia e parave të caktuara shfrytëzuesit të dokumentit (remitent), që është përmend te fatura ose vet trasantit:

- trasant (drawer) është urdhërdhënës ose dhënës i faturës i cili shënohet person i faturës (emitentë të faturës janë bankat dhe agjencitë e udhëtimeve të cilat japin lloje të faturave të veçanta);

- trasant (drawe) është ai i cili kryen pagesë sipas faturës prej mbulesës së trasantit që gjendet te ai;

- remitent (paye) është person fizik ose juridik i emëruar te dokumenti të cilit i paguhet sasia e përmendura te fatura, përkatësisht shfrytëzuesi i faturës dhe

- pronari i faturës është person i cili e posedon faturën në mënyrë ligjore.

Fatura si letër me vlerë i ka këto kushte:

- fatura është mjet për kredit (ose mjet për sigurim);

- fatura është mjet për pagesë dhe

- fatura është mjet për eskont.

Varësisht prej karakteristikave dhe rolit, ekzistojnë më shumë lloje të faturave: fatura e trasuar, fatura personale, faturë bllanko, faturë bllanko kambial, faturë mallrash, faturë biznesi, faturë cirkulare, e trasuar-faturë tërheqëse, personale – faturë e tërhequr, faturë komisioni dhe faturë krediti.

Llojet themelore të faturave janë fatura e trasuar dhe personale. Pasi fatura është formalepunë juridike dhe përbën formën e shkruar që përmbajnë numër të disa elementeve të cilat janë karakteristike për **faturën e trasuar.** Sipas Ligjit për faturë konventat përkatëse të Gjenevës prej vitit 1930, fatura e trasuar duhet t'i përmbajë këto elemente të rëndësishme:

- simbol se është faturë, e shtypur, në vetë faturën;
- transant (emitenti i faturës);
- emri, përkatësisht emri dhe selia e trasatit;
- emri i remitentit (shfrytëzues i drejtë i faturës);
- urdhër pa kusht të paguhet shuma e caktuar e parave nga mbulesa e trasantit;
- koha e arritjes;
- vendi ku duhet të kryhet pagesa;
- dita dhe vendi i dhënies dhe
- nënshkrimi i trasantit.

Fatura personale paraqet premtim pa kusht i marun prej trasantit si trasat se do të paguhet sasia e parave të caktuara remitentit që është përmendur te fatura. Fatura personale i përmban këto elemente:

- shenja se fatura është shtypur në vetë faturën, në gjuhën maqedonase me shkrim cirilik;
- premtim pa kusht se shuma e parave të caktuara do të paguhet;
- koha e arritjes;
- vendi ku duhet të kryhet pagesa;
- emri i remitentit;
- dita dhe vendi i dhënies dhe
- nënshkrimi i trasantit.

Punët e faturës janë veprime juridike dhe punë të cilat mundet të kryhen me faturën: dhënia e faturës, indosimi i faturës, akceptimi i faturës, cesioni i faturës, avalimi i faturës, blerja e faturës, amortizimi, revokim, protestë faturës etj.

Parimet karakteristike të faturës që kanë zbatim në punët juridike me faturë janë: shkrimi, inkorpurimi, obligimet e faturës fikse, rigoriziteti i faturës, solidariteti i faturës, pavarësia e faturës dhe padrejtshmëria e faturës.

Parimi i shkrimit (formaliteti) vjen në shprehje për shkak të faturës është dokument rreptësisht formal. Fatura patjetër duhet të jepet në formën me shkrim, me ligj në formë të shkruar, për më lehtë të vërtetuar ekzistimin e raporteve faturale-juridike, por edhe për shkak të realizimit të pengueshëm të qarkullimit faktural dhe juridik. Te dokumenti me shkrim i faturës duhet të përfshihen të gjitha elementet dhe veprimet faturale-juridike, si për shembull, deklarata për akceptim, avalim, indosim etj. Është e nevojshme të potencohet se në kohën më të re parimi i formalitetit bëhet më elastik në qarkullimin juridik, si edhe në rregullat më të reja për faturë juridike, në kontekst të përvetësimit të ashtuquajturës teoria e lëshimit (emisioni), përkatësisht dhënia e faturave bllanko.

Parimi për inkorporacion qëndron në atë që të drejtat dhe obligimet prej faturës janë të lidhura ngushtë me posedimin e dokumentit të faturës. Asnjë person nuk mund të realizon të drejtat e faturës nëse nuk ka as edhe vet faturë. Parimi i inkorporacionit njëkohësisht të përmban dy të drejta (të drejtë prej faturës dhe e drejta e faturës):

- e drejta prej faturës – sipas karakterit të saj është e drejtë obligative dhe qëndron në atë që pronari i faturës është autorizuar të kërkon prej borxhliut të faturës kryerjen e obligimit të caktuar të faturës dhe

- e drejta e faturës-sipas karakterit të saj është e drejtë e vërtetë e cila shprehet nëpërmjet asaj që ekziston supozim se pronari i faturës është pronar i vet ligjor dhe ka të drejtë kryerjen e obligimit prej borxhliut të faturës vetëm deri sa dokumenti i faturës është në pronësi të tij.

Sipas **parimit të obligimit fiks të faturës,** mund të kërkohet ose të obligohet në bazë të faturës, që padyshim shihet prej vet shkrimit të faturës. Obligimi i faturës vlerësohet në bazë të asaj që është përmendur në faturë, por jo në bazë të mjeteve tjera vërtetuese. Te obligimi i faturës hyhet atëherë kur te fatura me shkrim vendohet nënshkrimi dhe shënohen deklarata e faturës.

Me **parimin e rigorizitetit të faturës** sigurohet qarkullimi i shpejt dhe i penguar fatural-juridik dhe vërtetimi i lehtë i obloigimit të faturës. Fatura bën pjesë në instrumentet të cilët më së shumti i sigurojnë kreditorët dhe paraqet dokument rigoroz në lidhje ndaj kreditorëve në atë kuptim ai patjetër të realizon të drejtat e tij prej faturës sipas rregullave të caktuara juridike precize, i mundësojnë borxhliut pozitë të sigurt.

Parimi i faturës solidare qëndron në atë që të gjithë personat që e kanë nënshkruar faturën (trans-emitenti, akceptanti, avalisti dhe indosanti) në mënyrë solidare i përgjigjen pronarit të paguesit, pa dallim të raporteve të tyre.

Parimi i drejtshmërisë së faturës qëndron në atë që çdo borxhli i faturës (nënshkrues të faturës) i përgjigjet drejtpërdrejt kreditorit të faturës. Për këtë shkak, kreditori është i autorizuar drejtpërdrejt t'i drejtohet çdo borxhliu dhe prej tij të kërkon pagesën e shumës së faturës, pa dallim të rangut që e ka borxhliu i faturës te fatura.

Parimi i faturës së pavarur qëndron në atë që çdo borxhli i faturës, duke e nënshkruar faturën, krijon obligim të faturës së pavarur, e pavarur prej obligimeve të nënshkruesve të veçantë të faturave.

1.5.2. Diskontimi (eskontimi) i faturës

Sasia, e shënuar te fatura paraqet vlerë nominale të faturës ose shumës së faturës. Fatura mund të paguhet:

- në ditën e pagesës së faturës;
- pas afatit të pagesës, kur përveç vlerës nominale paguhet edhe kamata përkatëse e vonesës dhe
- para afatit të pagesës (shitja e faturës para afatit të pagesës). Diskontimi (eskontimi) i faturës paraqet transaksion financiar kur entiteti i biznesit kryen furnizimin e faturës së pa paguar deri te banka ku gjeneron (vlera nominale e faturës e zvogëluar për kamatën e dhënë dhe provizione). Në realitet, diskontimi i faturës paraqet shitja para kohës ose blerje para kohës të faturave para pagesës ku paguhet vlera nominale e faturës (vlera nominale e faturës) e zvogëluar për kamatën e cila njehsohet prej ditës së diskontimit deri te dita e pagesës. Entitetet e biznesit të cilët kanë fatura për mallra të shitura ose shërbime dhe të cilët kanë vendosur t'i eskontojnë te bankat, i dorëzojnë faturat te personat përgjegjës të bankës. Nëse entitetet e biznesit dorëzojnë më shumë fatura për një ditë, dorëzohet edhe spefikacioini i faturës.

Në rastin kur diskontimi kryhet pas ditës mungesa e faturave, atëherë kamata mblidhet prej vlerës nominale.

Norma e kamatës sipas të cilës llogaritet kjo kamatë është norma e diskontit, ndërsa kamata e fituar e diskontit, por llogaria në të cilën kryhet diskontimi paraqet llogari të diskontit.

Diskontimi i faturës-ekzistojnë më shumë mënyra për njehsimin e diskontit. Llogaria më e thjeshtë e diskontit komercial është kjo

$$\boxed{D_k = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}}$$

Njehsimi mi diskontit racional është kjo:

$$\boxed{Dr = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100 + p \cdot t}}$$

Bankat diskontimin e kryejnë duke shfrytëzuar diskontin bankar dhe shumën efektive të cilën e fiton pronari i faturës, njehsohet sipas këtij barazimi:

$$\boxed{E = N - \left(1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100}\right)}$$

1. Fatura me vlerë nominale prej1000 $ është dorëzuar deri te banka në ditën 10. 09. 2009. Norma e diskonit është 7%, ndërsa afati i pagesës është në ditën 30.09.2009. Në bazë të parametrave të dhënë të njehsohet diskonti komercial dhe racional, si edhe ndryshimi ndërmjet

$N = 1000\$$
$t = 20$ ditë
$p = 7\%$

$$\mathrm{Dk} = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100} = \$3{,}89 \qquad \mathrm{Dr} = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100 + 7 \cdot 20} = \$3{,}87$$

$\mathrm{Dk} - \mathrm{Dr} = \$\,3{,}89 - \$\,3{,}87 = \$\,0{,}02$ ♦

2. Entiteti i biznesit X është pronar i faturës në bazë të shitjes së mjeteve transportuese në sasi prej 100 000 $, që duhet ta paguan më 01.10.2009. Megjithatë, entiteti i biznesit ka nevojë prej mjeteve finansiare dhe vendos ta dorëzon faturë në eskontimin në bankën e dhënë në ditën 06.09.2009, me normën e diskontit prej 8%. Për shërbimin e diskontimit, banka ka paguar provizion në lartësi prej 0,5% dhe100 $ shpenzime manipulative.

$N = 100\,000\$$
$p = 8\%$
$t = 25$ ditë

Njehsimi i shumës efektive:

$$\mathrm{E} = \mathrm{N} \cdot (1 - \frac{\mathrm{p} \cdot \mathrm{t}}{360 \cdot 100)}) = \$100000 \cdot (1 - \frac{8 \cdot 25}{360 \cdot 100}) = \$99444{,}44$$

Në bazë të shumës efektive, diskonti është:

$D = 100\,000\$ - 99\,444{,}44\$ = 555{,}56\$$

ose diskonti i njehsuar me barazimin për diskontin komercial:

$$\mathrm{Dk} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{p}}{360 \cdot 100} = \frac{100000 \cdot 8 \cdot 25}{36000} = \$555{,}56$$

Sasia e provizionit në bazë të shërbimit për diskontimin është:

$$\$99444{,}44 \frac{0{,}5}{100} = \$497.$$

M edhe të shpenzimeve manipulative ($ 100), entiteti i biznesit do të fiton shumë efektive në sasi prej:

99 444,44$ - 497$ - 100$ = 98 847,44$. ◆

3. Kompania A më datën 01.05. 2009, ka dorëzuar tre fatura me vlera të barabarta nominale prej 20 000$, në eskontimin deri te banka, ku faturat kanë afat të ndryshëm të pagesës. Të njehsohet sasia e mjeteve të parave që i ka paguar banka kompanisë më datën 01.05, nëse norma e disknit është 6%, provizioni është 1% kurse shpenzimet manipulative janë 20$.

Fatura është diskontuar më datën 01.05.2010

	Sasia (N)	Afati i pagesës	Ditët	*Dk*
Fatura A	20 000 $	01.04.2009	30	100 $
Fatura B	20 000 $	20.03.2009	41	137 $
Fatura C	20 000 $	15.03.2009	46	153 $
	60 000 $			$\sum$ Dk = 390 $

p = 6 %

$\sum Dk$ = 390 $

provizioni = 1%

shpenzimet manipulative = $ 20

shuma efektive $= \sum N - \sum Dk$ = 60 000 – 390 = $ 59 610

– (provizioni = 59 610 x 0,01 = 596,1)

= 59 013,9

– (20)

= 58 993,9

Banka më datën 01.05.2010 do t'i paguan kompanisë A sasinë prej 58 993,9 denarë për tre faturat e barabarta të diskontuara me afat të ndryshëm të pagesës. ◆

Kur kryhet blerja e faturave, shpenzimet e përgjithshme shtohen në vlerën e diskontuar të faturës.

4. Personi i caktuar më datën 01.05 dorëzon faturën (A) me vlerë nominale prej 50 000 denarë me afat të pagesës më datën 16.05 dhe faturën (B) me vlerë nominale prej 70 000 denarë dhe afat të pagesës më datën 31.07. Personi dorëzon kërkesë vlerat diskontuese të faturave të hidhen në llogarinë e tij në datën e mesme (të njëjtën ditë të disponon me të dy shumat), por po ashtu as banka as personi të mos dëmtohen. Norma e pagesës është 8% edhe për të dy faturat. Cila është data e pagesës së shumës prej faturave të diskontuara dhe sa është shuma efektive që do t'i paguhet personit?

Prej parametrave të bashkangjitura kemi:

– Për faturën (A), vlera nominale N1 = 50 000 denarë dhe $t1$ = 15 ditë, edhe
– Për faturën (B), vlera nominale N1 = 70 000 denarë dhe $t1$ = 92 ditë.

Formula për njehsimin e afatit mesatar të diskontimit:

$$\boxed{\mathrm{t_s} = \frac{\sum_{t=1}^{n} N_i t_i}{\sum_{t=1}^{n} N_i}}$$

$$\text{afati mesatar i diskontimit } = \frac{50000 \cdot 15 + 70000 \cdot 92}{50000 + 70000} = 60 \text{ ditë}$$

$p = 8\%$

$$\mathrm{Dk} = \frac{\mathrm{N \cdot t \cdot p}}{360 \cdot 100} = \frac{(50000 + 70000) \cdot 60 \cdot 8}{36000} = 1600$$

shuma efektive: (50 000+70 000) - 1 600 = 118 400 denarë.

Detyra për punë të pavarur

1. Cilat parametra shfrytëzohen gjatë njehsimeve të diskontit?

2. Çka paraqet fatura dhe prej cilëve elemente përbëhet?

3. Numëroi subjektet gjatë transaksionit me fatura?

4. Fatura me vlerë nominale prej 2 500 denarë është dorëzuar në eskontim deri te banka më datën 15.10. Norma e diskontimit është 9%, kurse afati i pagesës është më datën 20.11. Në bazë të parametrave të dhënë, njehso diskontin komercial dhe racional, si edhe ndryshimin ndërmjet tyre.

5. Kompania A në bazë të mallit të shitur, fiton faturë me vlerë nominale prej 1 200 000$ me afat të pagesës më datën 01.04.2010. Për shkak të nevojës prej mjeteve të parave plotësuese, kompania vendos të shet fatrurën (të eskonton) më datën 15.03.2010. Norma e diskontit është 7%, provizioni 0,05 dhe 500$ shpenzimet manipulative. Në bazë të faturës së diskontit, njehso sa ka fituar kompania prej bankës?

1. 6. Llogaritë depozitare

Bankat paraqesin institucione depozitive – kreditore të cilat mobilizojnë mjete të lira të parave prej subjekteve suficitare (kursyes) dhe lejon kredi të subjekteve deficite (entitete të cilët kanë ide produktive investuese, por nuk kanë kapital të mjaftueshëm për realizimin e të njëjtëve). Pikërisht, burime tradicionale të bankave janë depozitet (depozita të afatizuara dhe depozita pa afat), të cilat janë bazë e bankës për lejimin e kredive, investim dhe gjenerim të të ardhurave. Në këtë mënyrë, bankat mundësojnë funksion kursyes dhe kreditor nëpërmjet së cilës mundësojnë alokacion efikas të fondeve të parave dhe gjenerimi i të ardhurave në formë të kamatës për deponentët (kursyes në bankë) edhe për bankën (në bazë të kredive të lejuara).

Çdo qytetar që kursen mundet depozitin e tij të parave ta depoziton në bankë. Për depozitin e kursyer si depozit parash të depozituar në bankë, jepet librezë kursimi në të cilën shkruhen pagesat, gjendja dhe kamatat e njehsuara pas depozitit të kursyer. Libreza e kursimit mund të jetë në emër edhe të personit nën kujdesje. Elementet themelore të xhirollogarisë janë këto: emri dhe mbiemri i depozitorit, data e lindjes dhe numri amë, xhirollogaria e bankës numri i librezës dhe vendi për vërejtje të bankës (shenja se paratë janë deponuar pa afat ose me afatizim në interval kohe të caktuar).

Libreza e kursimit vërtetohet me nënshkrim dhe vulë të bankës. Është e nevojshme të potencohet se të gjitha pagesat janë futur në librezë dhe atë në ditën kur ka ndodhur ndryshimi dhe çdo ndryshim vërtetohet me vulë dhe nënshkrim nga ana e arkëtarit.

Me mjetet prej librezës së kursimit mund të disponojnë:

- personi për të cilin është libreza e kursimit dhe
- person i autorizuar nga deponenti, përfaqësues ligjor dhe kujdestar.

Deponimet e depozitit në bankë është në funksion të kursimit, prandaj ky lloj i llogarive për depozitin e deponuar quhet llogari në depozitat kursyese ose llogari deponuese, Depozimet e kursyera mund të jenë:

- me afatizim dhe pa afatizim (të afatizuar me nxjerrje mujore të kamatës, (me anulim të afatit ose pa anulim të afatit, me qëllim të veçantë ose pa qëllim);
- depozitat kursyese të hapura dhe
- kursim denarësh të hapur për fëmijë.

Të dhënat për depozitat e qytetarëve paraqesin fshehtësi biznesi të bankës. Gjithashtu, banka mund të hap libreza kursimi të personave fizik të jashtëm në Republikën e Maqedonisë. Normat e kamatës janë të shkruara me politikën bankare të biznesit.

Lartësia e normës së kamatës që paguhet deponentëve varet prej asaj a bëhet fjalë për depozitë me afatizim ose për depozitime të afatizuara ose të pa afatizuara. Kamata (interesi) e shumës së parave e cila paguhet për shfrytëzimin e kapitalit të huaj. Ky definicion për kamatën është për kamatën edhe të mjeteve të parave të deponuara, ku banka, në të cilën ato janë deponuar për periudhë kohore të caktuar, i shfrytëzon mjetet edhe të deponueseve, të cilëve si shpërblim u paguhet kamata.

Kamata llogaritet dhe i shtohet depozitit në fund të vikti kalendarik për depozitë me afatizim, ndërsa për depozita të afatizuara, kamata i shtohet në fund të afatit me afatizim. Njehsimin e kamatës, banka e kryen në bazë të shumës së deponuar , por ndryshimi i vet kamatës varet prej vlerës së depozitimit, prej kamatave të shumës së deponuar dhe të paguar për të cilat shkruhet depoziti (depoziti i kursyer).

Depozitat e denarëve të deponuara janë të siguruara në Fondin për sigurim të depozitave kursyese. Fondi i ç'dëmton personat fizikë në lartësi 100% prej depozitit të çdo personi fizikë deri në sasinë e kundërvlerës në denarë të 10 000 EUR dhe 90% prej depozitit të çdo personi fizikë në një bankë ose në kursimtore deri në sasinë prej kundërvlerës në denarë ndërmjet 10 000 EUR dhe 20 000 EUR, por jo më shumë se kundërvlera prej denarë të 20 000 EUR. Te sasitë e përmendura njehsohet pjesa kryesore e depozitit të kursyer i zmadhuar për kamatën në lartësi më së shumti deri te norma eskonte e Bankës popullore të Republikës së Maqedonisë, e vlershme në periudhën përkatëse.

Gjatë njehsimit të kamatës për depozita kursyese shfrytëzohet barazimi për njehsimin e kamatës së thjeshtë. Gjatë njehsimit të kamatës së thjeshtë dhe të përbërë kalkulohen këto komponente:

- shuma themelore - K_o (depoziti, kapitali i zmadhuar, kapitali i zvogëluar), që është lëndë e kamatizimit;
- periudha e kamatës, i cili është i barabartë me kohën për të cilën deponohen ose shfrytëzohen mjetete e parave;
- norma e kamatës, interesi *(p* ose *i*);
- kamata. E cila është e barabartë me shumën *k* të cilën banka duhet t'ia paguan deponentit, e njehsuar norma e kamatës dhe periudha e kamatës së kontraktuar.

Formulat për njehsimin e kamatës së thjeshtë në rastin kur periudha e depozimit është shprehur në vite, muaj dhe ditë:

- depozitat e afatizuara në vit $\boxed{k = \frac{K_0 p}{100}}$ ose vite $\boxed{k = \frac{K_0 pn}{100}}$
- depoziatave të afatizuara sipas muajve $\boxed{k = \frac{K_0 pm}{1200}}$

• të njehsimit të kamatës sipas ditëve $\boxed{k = \frac{K_0 p t}{36500}}$

Për njehsimin e kamatës për depopzitin e dhënë, shfrytëzohet tabela për determinimin e ditëve për ngritjen e shumës së dhënë (pagesa) para ose ditë për futjen e depozitave të reja.

Tabela 1

Numri i ditëve sipas kalendarit deri në fund të vitit

Dita	Jan.	Shkurt	Mars	Prill	Maj	Qershor	Korrik	Gusht	Shtator	Tetor	Nëntor	Dhjetor
1.	365	334	306	275	245	214	184	153	122	92	61	31
2.	364	333	305	274	244	213	183	152	121	91	60	30
3.	363	332	304	273	243	212	182	151	120	90	59	29
4.	362	331	303	272	242	211	181	150	119	89	58	28
5.	361	330	302	271	241	210	180	149	118	88	57	27
6.	360	329	301	270	240	209	179	148	117	87	56	26
7.	359	328	300	269	239	208	178	147	116	86	55	25
8.	358	327	299	268	238	207	177	146	115	85	54	24
9.	357	326	298	267	237	206	176	145	114	84	53	23
10.	356	325	297	266	236	205	175	144	113	83	52	22
11.	355	324	296	265	235	204	174	143	112	82	51	21
12.	354	323	295	264	234	203	173	142	111	81	50	20
13.	353	322	294	263	233	202	172	141	110	80	49	19
14.	352	321	293	262	232	201	171	140	109	79	48	18
15.	351	320	292	261	231	200	170	139	108	78	47	17
16.	350	319	291	260	230	199	169	138	107	77	46	16
17.	349	318	290	259	229	198	168	137	106	76	45	15
18.	348	317	289	258	228	197	167	136	105	75	44	14
19.	347	316	288	257	227	196	166	135	104	74	43	13
20.	346	315	287	256	226	195	165	134	103	73	42	12
21.	345	314	286	255	225	194	164	133	102	72	41	11
22.	344	313	285	254	224	193	163	132	101	71	40	10
23.	343	312	284	253	223	192	162	131	100	70	39	9
24.	342	311	283	252	222	191	161	130	99	69	38	8
25.	341	310	282	251	221	190	160	129	98	68	37	7
26.	340	309	281	250	220	189	159	128	97	67	36	6
27.	339	308	280	249	219	188	158	127	96	66	35	5
28.	338	307	279	248	218	187	157	126	95	65	34	4
29.	337		278	247	217	186	156	125	94	64	33	3
30.	336		277	246	216	185	155	124	93	63	32	2
31.	335		276		215		154	123		62		1

1. Subjekt i dhënë ka deponuar në bankë sasi të parave prej 10.000 denarë me 9% kamata vjetore. Me sa para do të disponon deponenti pas 5 muajve?

K_o= 10 000 denarë

$p = 9\%$
$m = 5$ muaj

Në bazë të cilës parametrat e dhënë, kamata të cilën deponenti do ta merr pas pesë muajve është:

$$k = \frac{10000 \cdot 9 \cdot 5}{1200} = 375 \text{ denarë}$$

Në bazë të kamatës së njehsuar, deponenti pas pesë muajve, do të disponon me 10.375 denarë, si rezultat i kapitalit themelor të zmadhuar me kamatë për periudhën e dhënë të kamatizimit. ◆

2. Person i caktuar ka deponuar 100 000 denarë në bankë, më datën 25.05, ndërsa më datën 01.10 ka ngritur 45 000 denarë. Sa është sasia e kamatës në fund të vitit, nëse banka zbaton normën e kamatës në lartësi prej 5%.

$K_0 = 100\,000$ denarë
$p = 5\%$
$t_1 = 221$ ditë (prej datës 25.05 deri në fund të vitit)
$K_1 = -45\,000$ denarë
$t_2 = 92$ ditë (prej 01.10 deri në fund të vitit)

$$i = i_1 - i_2 = \frac{100000 \cdot 5 \cdot 221}{36500} - \frac{45000 \cdot 5 \cdot 92}{36500} = 3027{,}4 - 567 = 2460{,}3\,. \ \blacklozenge$$

3. Gjatë vitit 2009 në zhiro llogaritë e deponentit X kanë ndodhur ndryshime, ku norma e kamatës është në sasi prej 5%:

10.01.2009	nën pagesën	10 000
15.02.2009	nën pagesën	8 000
01.03.2009	nën pagesën	6 000
20.03.2009	nën pagesën	2 000

Në bazë të kësaj që është përmendur më lartë të regjistrohen të gjitha ndryshimet te llogaria e depozitit.

Për çdo pagesë dhe nxjerrje menjëherë të njehsohet kamata prej ditës së pagesës (nxjerrjes) deri në fund të vitit.

kamata: 5%

Data	nën pagesën	të bëjnë pagesën	Saldo	Dita	Kamatës		
					+	—	Saldo
10.01.2009	10 000		10 000	356	487,67		487,67
15.02.2009	8 000		18 000	320	351		838,67
01.03.2009		6 000	12 000	306		251,5	587,16
20.12.2009	2 000		14 000	12	3,29		590,44
31.12.2009	590,44	Kamatës	14 590,44			590,44	
Gjithsej 31.12.2009	20 590,44	6 000	14 590,44		841,96	841,96	0

Detyra për punë të pavarur

1. Cilat janë burimet tradicionale të bankave në bazë të të cilave banka bën plasmane?

2. Të numërohen komponenetet të cilat zbatohen gjatë njehsimit të kamatës së thjeshtë dhe të përbërë?

3. Të numërohen elementet thelbësore të xhirollogarive?

4. Personi A, ditën 25.01.2010, ka deponuar sasinë prej 50 000 denarë, kurse më datën 20.09.2010 ka nxjerrë 35 000 denarë. Të njehsohet sasia (saldoja) në fund të vitit nëse banka zbaton llogari kamatore në lartësi prej 8%.

5. Gjatë vitit 2009, në xhirollogarinë për depozita kursyese të personit X, janë krye këto ndryshime:

05.01. 2009	nën pagesën	3 000
20.01. 2009	të bëjnë pagesën	2 500
31.01.2009	Ka paguar	3 200
28.02.2009	Ka paguar	3 350
03.04.2009	Ka nxjerrë	4 000
04.06.2009	Ka paguar	5 000
09.09.2009	Ka nxjerrë	3 700
10.11.2009	Ka paguar	3 000
25.12.2009	Ka nxjerrë	5 000

Të njehsohen ndryshimet te libreza e kursimit (zhiro llogarinë) nës norma e kamatës është 7.5%.

1. 7. Xhirollogaria kreditore

Në kuadër të ekonomizimit, bankat dhe institucionet financiare kryejnë transferin e kapitalit në qëllime potenciale prodhuese. Pikërisht, disa entitete të biznesit të caktuar kanë plane investuese. Por nuk kanë mjete të mjaftueshme për realizimin e tyre. Gjithashtu amvisëritë ballafaqohen me nevojën e kapitalit plotësues të dedikuar për shpenzimet e tyre.. Me qëllim që të kënaqen kërkesat e klientëve korporativ dhe amvisëritë, bankat lejojnë kredi biznesi dhe kredi shpenzuese për banorët.

Varësisht prej afatit të pagesës, dallohen këto lloje të kredive:

- kredi me afat të shkurtër (afati i pagesës deri në një vit);
- kreddi me afat të mesëm (afati i pagesës prej një viti deri në tre vjet) dhe
- kredi me afat të gjatë (afati i pagesës mbi tre vjet).

Kredi me afat të shkurtër janë të dedikuar për financimin e nevojave aktuale të klientëve, mbajtja e likuiditetit me afat të shkurtër në tregti, për prodhim, për eksport dhe shërbimi të pagesave. Shfrytëzimi i kredive me afat të shkurtër është me kërkesë të klientit dhe mundet të jetë suksesive ose revolving. Kthimi i kredisë ose revolvingu me marrëveshje dinamike. Sigurimi i kreditit kryhet me hipotekë të patundshmërisë, peng e sendeve të tundshmërisë, depozit, garant bankare, letër prej vlere dhe të drejta.

Kredi me afat të gjatë për persona juridik – i dedikuar për këtë lloj të kredisë është për deponime me afat të gjatë, realizimi i projekteve investituese, blerja e mjeteve themelore etj. Afati i kthimit të kreditit me afat të gjatë është deri më tre vjet (ose mbi tre vjet varësisht prej politikës së bankës). Janë të deminuara në denarë ose janë denarë me klauzulë devizore.

Mënyra e shfrytëzimit të kredisë me afat të gjatë është varësisht prej kërkesës së klientit, në mënyrë suksesive në bazë të dokumentaconit i cili tregon shfrytëzimi qëllimor i mjeteve. Kredija kthehet në anuitete mujore të barabarta, mujore, tremujore ose gjysmëvjetore varësisht prej dinamikës së investimit. Kreditë sigurohen me hipotekë të patundshmërisë, peng e sendeve të tundshme, depozit, garantë bankare, letra me vlerë dhe të drejtë.

Çmimi i kredive (norma kamatore) determinohet varësisht prej llojit dhe afatizimit të kredisë.Për kreditë e lejuara, banka mban llogari të veçantë, zhiro llogari kreditore. Kredia e lejuar bartet në zhiro-llogari të shfrytëzuesit nëpërmjet së cilës kryhet edhe shfrytëzimi i kredisë. Në rastin kur vjen deri tek mos pagesa e anuiteteve (pagesa e kredisë dhe kamatës) në afatin e paraparë, përveç të rregulltës, paguhet edhe kamata e dënimit. Gjatë njehsimit të kamatës ditët merren sipas kalendarit, kurse për vitin merrem 365 ditë ose366 ditë kur ai është vit kalues.

Për kreditë e lejuara mbahet evidencë nëpërmjet kredisë dhe xhirollogarive dhe atë nëpërmes rrugës elektronike.

1. Klienti korporativ X, prej një banke ka lejim për të shfrytëzuar kredi në sasi prej 1 000 000 denarë, me afat të pagesës deri në datën 30.07.2010. Norma e kredisë për kamatën e rregullt është 9% vjetore, kurse për kamatën e dënimit 3% vjetore. Sipërmarrja prej datës 01.02.2010 e ka shfrytëzuar tërësisht kredinë e lejuar, ndërsa pagesat janë realizuar sipas kësaj radhe:

20.03.2010	Pagesa I.	100 000 denarë
15.04.2010	Pagesa II.	120 000 denarë
01.08.2010	Pagesa III.	180 000 denarë
15.08.2010	Pagesa IV.	600 000 denarë

Të tregohen të gjitha ndryshimet e llogarisë kreditore të bankës (me llogarinë e kamatës së rregult dhe të dënimit) përfundimisht me datën 30.09.2010. Gjithashtu të kryen edhe ndryshimet e zhiro-llogarisë të klientit korporativ X.

Data e ndryshimit	Sasia e ndryshimit		Ditë për		Kamata	
	Të jep	Të merrë	Kamata e rregullt	Kamata me dënim	Kamata e rregullt	Kamata me dënim
01.02.2010	1 000 000		242		J 59 672	
20.03.2010		100 000	194		M 4 784	
15.04.2010		120 000	168		M 4 971	
01.08.2010		180 000	66		M 7 457	
15.08.2010		600 000	15	46	M 2 219	J 2 268,5
Gjithsej:	1 000 000	1 000 000			J 79 103	J 2 268,5

Ditët për kamatën e rregullt për sasinë e kredisë janë njehsuar për periudhën prej 01.02 deri 30.09. Me sasinë e kamatës obligohet shfrytëzuesi i kredisë (jep, shenja-J). Ditët për kamatën e rregullt për ndryshimet tjera llogariten prej datës së ndryshimit deri në fund të periudhës llogaritëse (30.09.2010). Kamata për këtë numër të ditëve, për ndryshimin përkatës, merret (merr, shenja-M). Ditët e kamatës me dënim llogariten prej afatit të kredisë së arritur deri në datën e ndryshimit. Me këtë kamatë obligohet shfrytëzuesi.

Xhiro llogaria e korporatës X

Data e ndryshimit	Përshkrimi	Sasia e ndryshimit		Saldo
		Të jep	Të merr	
15.01.2010	Salldo		500 000	500 000
01.02.2010	Kredit		1 000 000	1 500 000
20.03. 2010	Pagesa I	100 000		1 400 000
15.04. 2010	Pagesa II	120 000		1 280 000
01.08. 2010	Pagesa III	180 000		1 100 000
15. 08.2010	Pagesa IV	600 000		500 000
30.09.2010	9% kamata	79 103		420 897
30.09.2010	3% kamata e dënimit	2 268,5		418 628,5
30.09.2010	Saldo për barazim	418 628,5		
		1 500 000	1 500 000	
01.10	Saldo			418 628,5

Detyra për punë të pavarur

1. Të numërohen cilët lloje të kredive ekzistojnë varësisht prej afatit të pagesës?

2. Përmendi karakteristikat dhe qëllimin e kredive me afat të shkurtër.

3. Përmendi karakteristikat dhe qëllimin e kredive me afat të gjatë

4. Prej çka varet çmimi i kredisë?

5. Organizata X, prej një banke i është lejuar kredi në sasi prej 20 000 denarë, me afat të dorëzimit 26.04.2010. Norma e kamatës për kamatën e rregullt është 7,5% vjetore, kurse për kamatën me dënim 2% vjetore. Organizata më datën 01.03.2010 e shfrytëzon tërësisht kredinë e lejuar, ndërsa pagesat janë realizuar në këtë mënyrë:

05.03.2010	Pagesa I	270 denarë
12.04.2010	Pagesa II	580 denarë
17.05.2010	Pagesa III	700 denarë
23.05.2010	Pagesa IV	18 450 denarë

Të tregohen të gjitha ndryshimet e llogarisë kreditore të bankës (me llogarinë e kamatës së rregullt dhe me dënim) përfundimisht me datën 30.06.2010. Gjithashtu të kryhen edhe ndryshimet e xhirollogarisë së firmës X, nëse saldo e fillimit të xhirollogarisë është 50 000 denarë.

1. 8. Detyra për ushtrime

1. Për sa kohë 17 628 denarë do të sjellin kamatë në sasi 2 393 denarë, nëse norma e kamatës është 6% ?

2. Njehso shumën themelore të deponuar për të cilën për periudhën 20 mars - 28 qershor, me matricë kohore (k,360), me normë kamate 4,75% njehsohet dyherë kamatë më e madhe se sa ajo e cila njehsohet për shumat 20 000 denarë në 3 muaj, 40 000 denarë në 5 muaj dhe 12 000 denarë në 6 muaj, me normë të kamatës 4,5%.

3*. Njehso normën e kamatës me të cilën për 60 000 denarë, të deponuara në periudhën 8.03 - 29.06 , sipas principit (k,360), njehsohet kamata e cila paraqet 45% prej kamatës së njehsuar për shumat prej 25000 denarë në periudhën 8.04 - 30.06, 62 000 denarë në periudhën 18.04-30.06 dhe 75 600 denarë në periudhën 4.05 -30.06, me matricë kohore (k,365) dhe normë të kamatës 6,5%.

4*. Një e treta e shumës themelore është deponuar në 1,5 vjet, dy të pestat prej shumës në 4 muaj, kurse mbetja në 80 ditë. Norma e kamatës për të gjitha shumat e veçanta është 4%. Kamata e përgjithshme e njehsuar është 8 500 denarë. Sa është shuma themelore?

5. Pas zvogëlimit të shumës themelore për kamatë prej 4,75%, për katër muaj, borxhliu ka pranuar 295 250 denarë. Sa është borxhi, sa është kamata?

6. Duke përfshirë edhe kamatën e njehsuar me 6% , kamata për 60 dena, borxhliu ka kthye 50 500 denarë. Çfarë kamate do të sjell kapitali dy herë më i madh se fillestari, nëse afatizohet në 3 vjet, për të njëjtën normë të kamatës?

7. Pas zbritjes së 9% kamatë, për periudhën 25.01 - 31.08, duke e llogaritur kohën në mënyrë kalendarike (k,365), janë pranuar 100 000 denerë. Sa është borxhi, por sa është kamata e njehsuar?

8. Personi prej katër pagesave në bankë dhe atë: 45 000 denarë me 6% kamata në 10.04, 100 000 denarë me 8% kamata e 25.04, 70 000 denarë me 9% kamata e 20.05 dhe 100 000 denarë me 4% kamata e 31.05. Në cilën ditë dhe cilën normë të kamatës mundet personi t'i paguan borxhet, pa qenë asnjëri i dëmtuar.

9. Shoqata tregtare u ka borxh furnizuesve të ndryshëm 40 000 denarë me 4% kamata për 120 ditë, 60 000 denarë me 4% kamata për 240 ditë dhe 100 000 denarë me 4% kamata për 300 ditë. Pas sa ditë sipërmarrja mund t'i paguan të gjitha shumat menjëherë?

10. Shoqatë trgtare X ka borxh 80 000 denarë në 5.04, 150 000 denarë në 20.05 dhe 275 000 denarë në 30.06. Njëkohësisht kërkon 130 000 denarë në 17.03 dhe 900 000 denarë në 5.08 . Në cilën datë mund të paguhet saldoja e borxhit?

11. Kompania X ka dorëzua në faturën e eskontit deri te një bankë në datën 06.04.2009 vjet. Vlera nominale e faturës është $ 250 000, kurse afati i pagesës është në ditën 15.05.2009. Njehso diskontin komercial dhe shumën efikase nëse banka ka zbatuar normë të diskontit prej 8%.

12. Kompania E në bazë të shitjes së pajisjes merr faturë në lartësi prej 3 000 000 denarë. Cili duhet ta paguan deri në datën 20.04.2009. Për shkak të ballafaqimit me problemin e likuidimit, kompania vendos ta eskonton faturën në ditën 21.03.2009. Norma e diskontit është 6%, provizioni për procesin e diskontimit është 0,025% dhe 50 denarë janë shpenzimet manipulative. Sa është shuma efektive që e ka paguar banka në llogarinë e kompanisë?

13. Organizata X është pronar i faturës prej 150 000 denarë dhe afati i pagesës në ditën 05.05.2009. Organizata sjell vendim parakohe faturës në bankë dhe atë në datën 05.03.2009, me normë të diskontit prej 9%, është në sasi 0,045 dhe 100 denarë shpenzim manipulative. Sa është shuma efektive prej faturës së diskontit, por sa është diskonti komercial?

14. Ditën 20.04.2010, një bankë, ka pranuar në diskontim tre fatura të barabarta me vlerë nominale prej $ 50 000, kurse datat e pagesave janë këto: 20.06.2010, 10.07.2010 dhe në datën 20.07.2010. Sa do të paguan banka në datën 20.04.2010, nëse shuma e diskontit është 8,5 %, provizioni është në sasi prej 1% dhe shpenzimet manipulative janë në sasi prej 19 denarë.

15. Në një bankë në datën 15.03.2010 janë dërguar dy fatura për eskontim:

– fatura X me vlerë nominale prej 3 000 000$ dhe data e pagesës në datën 25.01.2010 dhe

– fatura Y me vlerë nominale prej 5 000 000 $ dhe data e pagesës në datën 20.06. 2010.

Klienti ka dorëzuar kërkesë për vlerën e diskontimit të faturave të hedhen në llogarinë e tij të datës mesatare (të njëjtën ditë disponohet me të dy shumat). Të determinohet data te e cila paguhen vlerat e diskontuara.

16. Në datën 01.08 janë deponuar 400 000 denarë, kurse në datën 02.10 janë nxjerrë 120 000 denarë. Nëse zbatohet norma e kamatës prej 5%, sa është kamata në fund të vitit?

17. Gjatë vitit të 2010 te llogaria e deponimeve У, kanë ndodhur ndryshime, ku norma e kamatës është në sasi prej 10%:

15.03.2009	Pagesa	50 000
01.04.2009	Nxjerrja	20 000
05.06.2009	Pagesa	18 000
07.07.2009	Nxjerrja	15 000
08.08.2009	Pagesa	18 000
01.09.2009	Nxjerrja	13 000

Në bazë të asaj që është përmendur më lartë të regjistrohen të gjitha ndryshimet e llogarisë së deponimit.

18*. Organizata У, prej bankës përkatëse i është lejuar kredi në sasi prej 70 000 denarë, me afat të pagesës 25.06.2010. Norma e kamatës për kamatën e rregullt është 10% vjetore, kurse për kamatën me dënim 2% vjetore. Sipërmarrja në dytën 01.04.2010 e ka shfrytëzuar tërësisht kredinë e lejuar, ndërsa pagesat janë realizuar në këtë mënyrë:

01.05.2010	Pagesa I	7 000 denarë
10.05.2010	Pagesa II	10 000 denarë
20.06.2010	Pagesa III	15 000 denarë
25.07.2010	Pagesa IV	38 000 denarë

Të paraqiten të gjitha ndryshimet e llogarisë së kredisë në bankë (me llogarinë e kamatës së rregullt dhe me dënim) përfundimisht me 30.08.2010. Gjithashtu të kryhen ndryshimet e xhirollogarisë së organizatës X, nëse saldo fillestare e xhirollogarisë është 30 000 denarë.

Pasqyra tematike

Kamata paraqet sasi të përqindjes prej shumës së deponuar, përkatësisht prej shumës së huazuar, si shpërblim të cilën borxhliu ia paguan kreditorit. Nëse kamata njehsohet vetëm në kapitalin e deponuar në të njëjtën shumë themelore në çdo periudhë të njehsimit të kamatës, quhet **kamata e thjeshtë.**

Njehsimi i kamatës së thjeshtë, si edhe madhësitë tjera prej të cilave ajo varet quhet...

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{100}}$$

K – shuma themelore

i – kamata e njehsuar

p – norma e kamatës

t – koha për të cilën njehsohet kamata

Afati i mesëm quhet koha për të cilën mund të paguhet menjëherë më shumë shuma të borxheve, në vend të shumave të njëjta të paguhen në afate të ndryshme. Mënyra e konstatimit të afatit të mesëm dhe norma mesatare, quhet **llogaria me termin** dhe paraqet një zbatim të normës së kamatës së thjeshtë. **Afati i saldos të borxhit** është afat te i cili mund të paguhet ndryshimi ndërmjet borxhit dhe kërkesave, në situatën në të cilën përveç asaj që ka borxh, personi është edhe kreditor për disa borxhli të tjerë.

Nëse e dimë me cilën normë mesatare të kamatës do të kamatizojmë, koha e kthimit të borxhit të përgjithshëm njehsohet me formulën

$$\boxed{t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{p_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}},$$

Por nëse e dimë kohën për kthimin e borxhit të përgjithshëm, norma e kamatës mesatare, njehsohet sipas formulës

$$\boxed{p_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{t_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}},$$

ku $K_{1,}$ $K_{2,}$ $K_{n,}$ janë sasitë r borxheve me normë të kamatës $p_{1,}$ $p_{2,}$ $p_{n,}$ përkatësisht, të cilët kanë sukses për periodat kohore $t_{1,}$ $t_{2,}$ $t_{n.}$

Afati i saldos njehsohet sipas formulës

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n - \left(P_1 p_1{}^0 t_1{}^0 + P_2 p_2{}^0 t_2{}^0 + \ldots + P_m p_m{}^0 t_m{}^0\right)}{Sp_s}$$

ku $K_1, K_2, \ldots, K_n$ janë obligimet e borxhliut sipas $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ditë, me norma të kamatave $p_1, p_2, \ldots, p_n$, kurse $P_1, P_2, \ldots, P_m$ janë kërkesat sipas afateve $t_1°, t_2° t_{m°}$ ditë edhe me kamata norma $p^0{}_1$, $p^0{}_2, \ldots, p^0{}_m$.

Gjatë pagesës para kohe të obligimeve nominale të dhëna, që duhet të paguhet në datën e caktuar në të ardhmen, shuma për të cilën zvogëlohet obligimi nominal në momentin para afatit të pagesës së borxhit, quhet **diskont.**

Mënyra për konversion të një obligimi që duhet të paguhet në datën e caktuar në obligim që para kohe paguhet quhet **diskontim.**

Gjatë njehsimeve diskonte shfrytëzohen këto parametra:
N – vlera nominale në të cilën është instrumenti financiar
t,n,n – afati diskont (eskont), i cli është i barabartë me kohën të shprehur në numër të ditëve - t, muajve të instrumenteve
D – diskont (eskont), i cili është i barabartë me shumën për të cilin zvogëlohet vlera nominale e instrumentit financiar
p – norma e kamatës sipas të cilës është njehsuar diskonti
E – shuma reale (efektive) me të cilën paguhet obligimi nominal në momentin e pagesës para kohe.

Ekzistojnë dy lloje të diskontit: **diskont komercial** - *Dk,* te i cili për bazë të njehsimit të diskontit merret vlera nominale, kurse vlera efektive fitohet si ndryshim i vlerës nominale dhe **diskont racioal** (matematikor) - Dr, te i cili vlera nominale fitohet si shumë e vlerës efektive dhe kamata përkatëse, e cila njehsohet për vlerën efektive.

Fatura paraqet letër me vlerë sipas urdhrit dhe emitentit të vet (trasant) jep urdhër pa kusht personit tjetër (trasat), të paguhet sasi e caktuar e parave shfrytëzuesit të të drejtave (remitent), që është përmend te fatura ose vet trasanti.

Llojet themelore të faturave janë të **trasuara** dhe **personale.** Fatura e trasuar duhet të përmban: shenjë për faturën, emri dhe selia e trasatit, emri i remitentit, urdhri pa kusht të paguhet shumë e caktuar të parave nga mbulesa e trasantit; koha e arritjes, vendi ku duhet të kryhet pagesa, dita dhe muaji i dhënies së trasantit. Fatura personale përmban: shenja për faturën, premtimi pa kusht se shuma e caktuar e parave do të paguhet, koha e arritjes, vendi ku duhet të kryhet pagesa, emri i remitentit, dita, vendi i dhënies dhe nënshkrimi i trasantit.

Punët e faturës janë veprime juridike dhe punë të cilat mund të kryhen me fatura: dhënia e faturës, indosimi i faturës, akceptimi i faturës, cesioni i faturës, avalimi i faturës, blerja e faturës, amortizimi, revokimi, protesta e faturës etj.

Parimet karakteristike të faturave që gjejnë zbatim në faturat e punëve juridike janë: shkrimi,inkorporimi, obligimi i faturës fikse, rigoroziteti i faturës, solidariteti i faturës, fatura e pavarur dhe fatura e drejtpërdrejët.

Diskontimi i faturës paraqet shitje para kohe ose blerje para kohe të faturës para pagesës ku paguhet vlera nominale e faturës (vlera e diskontuar e faturës), e zvogëluar për kamatën që njehsohet prej ditës së diskontimit deri te dita e pagesës.

Diskonti komercial njehsohet sipas formulës

$$\boxed{D_k = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}}$$

Kurse racional njehsohet sipas formulës

$$\boxed{Dr = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100 + p \cdot t}}.$$

ku *N* është vlera nominale, *t* është afati diskont i shprehur në ditë dhe *p* është norma e kamatës sipas të cilës njehsohet diskonti.

Shuma efektive e cila fitohet pronari i faturës gjatë diskontit bankier njehsohet sipas kësaj formule:

$$\boxed{E = N - \left(1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100}\right)},$$

ku *N* është vlera nominale, *t* është afati i diskontit i shprehur në ditë dhe *p* është norma e kamatës sipas së cilës është njehsuar diskonti.

Deponimi i depozitit në bankë është në funksion të kursimit, prandaj ky lloj i llogarive për depozitin e deponuar quhen llogari të deponimeve kursyese.

Gjatë njehsimit të kamatës për depozitat e kursyera shfrytëzohet barazimi për njehsimin e kamatës së thjeshtë. Formulat për njehsimin e kamatës së thjeshtë në rastin kur periudha e deponimit është shprehur në vite, muaj dhe ditë janë:

- $k = \dfrac{K_0 pn}{100}$ për depozit të afatizuar sipas viteve

- $k = \frac{K_0 pm}{1200}$ Për deponime të afatizuara sipas muajve
- $k = \frac{K_0 pt}{36500}$ Njehsimi i kamatës sipas ditëve

ku K_o është shuma themelore, *p* është norma e kamatës, dhe *t* është periudha e kamatës.

Me qëllim të kënaqen kërkesat e klientëve miratojnë kredi. Varësisht prej afatit të pagesës, dallojmë: kredi me afat të shkurtër, kredi me afat të mesëm, dhe kredi me afat të gjatë (afati i pagesës mbi tre vjet).

2 METALET E ÇMUARA. VALUTAT DHE DEVIZAT

2. 1. Përsosshmëria e metaleve të çmuara

Elementet ari, argjendi, platina, zhiva, ruteniumi, rodiumi osmiumi, paladiumi dhe iridiumi të njohur si **metale të çmuara.** Disa prej tyre janë të njohur prej kohërave të lashta. Vetitë e tyre janë se nuk oksidohen në ajër dhe nuk treten në thartira. Kanë funksion të rezervave të devizave. Prandaj, për shkak të rëndësisë së tyre, kontrolli i mjeteve prej metaleve të çmuara, përbërja e tyre dhe përmbajtja (përsosmëria), mënyra e shqyrtimit të tyre, kushtet e lëshimit në qarkullim dhe mbikëqyrja janë të rregulluara me ligj.

Këtu, do t'i shqyrtojmë arin dhe argjendin. Këto dy metale janë të njohur, të vlerësuara dhe të shfrytëzuara qysh prej shumë mijëra vitesh. Ari dhe argjendi si metale janë shumë të butë dhe të atillë janë më praktik për përdorim. Që të fitojnë ngurtësi, përzihen me metale tjera, sikurse janë bakri, nikeli etj. Përzierja e dy ose më shumë metale quhet **megurë.** Masa e metalit të çmuar megurën do ta quajmë edhe **masa e pastër,** ndërsa masën e megurës do ta quajmë **masa e përgjithshme.**

Raporti i masës së metalit të çmuar (masa e pastër) dhe masa e legurës (masa e përgjithshme) quhet **përsosshmëri** e metalit të çmuar. Të shprehurit e përsosshmërisë së metalit të çmuar kryhet në dy mënyra: **promil** dhe **anglisht.**

Te mënyra e PROMILES së përsosshjmërisë së metalit të çmuar shprehet në PROMILA. Po ashtu, numri i promileve jep sa pjesë të metalit të çmuar përfshihen te 1000 pjesë të legurës. Për shembull, nëse themi se përsoshmëria e metalit të çmuar është $900^0/_{oo}$, kjo do të thotë se në 1000 pjesë legurë përfshihen 900 pjesë të metalit të çmuar. Nëse e shënojmë masën e përgjithshme me m , pesha e pastër me m_b dhe përsosshmëria me f atëherë të shprehurit e përsoshmërisë në mënyrë promiole është sipas formulës:

$$\boxed{f = \frac{m_b}{m} \cdot 1000 \text{‰}}$$

1. Njehso përsoshmërinë e arit (në mënyrë të promilit) në send të arit nëse masa e pastër është 51°g, kurse masa e përgjithshme 800 g.

Përsoshmëria është $f = \frac{510}{800} \cdot 1000 = 637{,}5$ ‰. ♦

Sipas mënyrës angleze të të shprehurit, përsoshmëria shprehet me **karatë,** kurse përsoshmëria e argjendit në **penivejt.** Ari i pastër ka përsosshmëri 24 karatë, kurse përsosshmëria e argjendit të pastër është 240 penivejt.

2. Prodhimi i arit me përsosshmëri 14 karat, ka 14 pjesë të pastra të arit prej 24 pjesë të legurës. ♦

3. Prodhim i argjendit me përsosshmëri prej 200 penivejt ka 200 pjesë të argjendit të pastër prej 240 legura. ◆

Njësia më e vogël prej karatës dhe penivejtit është **grejn.** Poashtu, 1 karat ka 4 grejn kurse 1 penivejt 24 grejn.

Ari me përsoshmëri 22 karatë quhet **ar standard,** kurse argjenti me përsosshmëri 222 penivejtë **ar standard.** Nëse legura e arit (e argjentit) është më e mirë prej arit standard (argjentit), shfrytëzohet shenja *B* (prej anlishtes. Better – më i mirë), përkatësisht *W* (prej anglishtes. Worse – më i keq) nëse është më i keq.

4. Nëse prodhimi i arit është më i mirë prej arit standard për 1 karat dhe 2 grejn, shkruajmë B1,,2. Kjo do të thotë se MJETI i arit ka (22 +1,,2 = 23,,2) 23 karatë dhe 2 grejn. ◆

5. Mjeti i argjent me përsosshmëri *W* 7,,7 është më i keq prej argjentit standard për 7 penivejt dhe 7 grejn. Pasi 222-7,,7 = 221,,24-7,,7 = 214,,17, përfundojmë se përsosshmëria e Mjetitt të argjent është 214 penivejt dhe 17 grejn. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. a) Çka është përsosshmëria e metalit të çmuar?
b) Cilët janë mënyrat e të shprehurit të përsosshmërisë së metalit të çmuar?

2. Sa pjesë bakër ka legura e arit me përsosshmëri:
a) 920 ‰ b) 870 ‰?

3. Sa karat ka ari i pastër, kurse ari standard?

4. Sa grejn ka
a) MJETI i arit me përsosshmëri 20 karat;
b) MJETI i argjent me përsosshmëri 210 penmivejtë?

5*. Sa është përsosshmëria e
a) Mjeti të arit me B1, ,1; b) MJETIt të arit me *W* 5,,3 ;
c) Mjeti i argjendit me *B* 10,,11; ç) MJETI i argjentit me *W*12, ,8 ?

2. 2. Njehsimi i përsosshmërisë

Detyrat te të cilat njehsohet përsosshmëria e metalit të çmuar, mund të ndahen në dy tipa:
• detyra te të cilat kërkohet të shprehurit e përsosshmërisë prej mënyrës promile në angleze dhe anasjelltas,

• detyra te të cilat njehsohet përsosshmëria e metalit të çmuar nëse dihen masa e pastër e metalit të çmuar dhe masa e përgjithshme e legurës.

1. Shprehe përsosshmërinë e arit prej 800 % në mënyrën angleze.

E parashtrojmë proporcionin x : 24 = 800:1000 dhe fitojmë $x = \frac{24 \cdot 800}{1000} = 19{,}2$ karat. Domethënë përsosshmëria e arit është 19,2 karat. Pasi 0,2 karat janë 0,2 - 4 = 0,8 grejn mundemi të themi edhe se përsosshmëria e arit është 19 karat 0,8 grejn, përkatësisht (22 -19,,0.8 = 21,,4 -19,,0,8 = 2,,3,2) *W* 2,,3,2. ◆

2. Te cila përsosshmëri të mënyrë promile përgjigjet argjenti me *B* 8,,6 ?

Së pari ta njehsojmë përsosshmërinë në penivejt. Kemi 222 + 8, ,6 = 230,,6. Pasi 6 grejn janë $\frac{1}{4}$ prej një penivejt, vijon se përsosshmëria e argjentit është 230,25 penivejt.

Prej proporcionit x : 1000 = 230,25 : 240 vijon $x = \frac{230{,}25 \cdot 1000}{240} = 959{,}375$ ‰.

Domethënë, përsosshmëria e argjentit është 959,375 ‰ ◆

3. Mjeti i argjent ka masë 400g dhe përmban 350g argjent të pastër. Shprehe përsosshmërinë e argjentit në mënyrë promike.

Përsosshmëria e argjentit është $\frac{350}{400} \cdot 1000$ ‰, përkatësisht 875 ‰ ◆

4. Mjeti i arit me masë të përgjithshme 300g përmban 249*g* ar të pastër. Shprehe përsosshmërinë e arit në dy mënyra.

Së pari do ta shprehim përsosshmërinë në mënyrë promile. Kemi $\frac{249}{300} \cdot 1000$ ‰, përkatësisht 830 ‰

Tani do ta njehsojmë në mënyrë angleze. Prej proporcionit x : 24 = 830 :1000

Vijon $x = \frac{24 \cdot 830}{1000} = 19{,}92$ karat, përkatësisht 19 karatë 3,68 grejn. Përfundojmë se Mjeti i arit është me *W* 2,,0,32. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Shprehe përsosshmërinë e argjendit në mënyrën angleze nëse në 590 ‰

2. Shprehe përsosmërinë e arit në mënyrë promil, nëse në anglisht është *B*1,,*2*.

3. Përsosshmëria e arit është 15,36 karat. Shprehe përsosmërisnë e arit në mënyrë promil?

4. Mjeti i arit me masë 330*g* përmban 198g ar të pastër. Shprehe përsosmërinë e arit në:
a) në mënyrë promile; b) në mënyrë angleze.

5. Mjeti i argjendit me masë 250g përmban 105g ar të pastër. Shprehe përsosmërinë e argjendit në:
a) në mënyrë promile; b) në mënyrë angleze.

2. 3. Njehsimi i masës së pastër dhe të përgjithshme

Për njehsimin e masës së pastër të metalit të çmuar duhet të jenë të njohura përsosmëria dhe masa e përgjithshme.

Do të shqyrtojmë disa shembuj.

1. Sa gramë ar ka në Mjeti i arit me masë 50*g* dhe përsosmëri 920 ‰?

Prej proporcionit x : 50 = 920:1000 vijon $x=\dfrac{50\cdot 920}{1000}=46$. Domethënë, Mjeti i arit përmban 46*g* ar të pastër. ◆

2. Sa gramë ar të pastër ka te mjeti i arit me përsosmëri 18 karat dhe masë 560*g?*

Prej proporcionit x : 560 = 18 : 24 vijon $x=\dfrac{560\cdot 18}{24}=420$. Domethënë, Mjeti i arit përmban 420 g ar të pastër. ◆

3. Mjeti i argjendtë me përsosmëri *W* 8, ,6 e ka masën 480g. Sa gramë argjend të pastër përmban Mjeti?

E njehsojmë përsosmërinë e argjendit në penivejt. Kemi
222 - 8, ,6 = 221, ,24 - 8, ,6 = 213, ,18,

përkatësisht përsosmëria e argjendit është $213\dfrac{18}{24}=213\dfrac{3}{4}=213{,}75$ penivejt.

Tani, prej proporcionit $x:480=213{,}75:240$ vijon $x=\dfrac{213{,}75\cdot 480}{240}=427{,}5$.
Domethënë, masa e pastër e argjendit është 427,5g. ◆

Për njehsimin e masës së përgjithshme të legurës, është e nevojshme të njihen përsosmëria e metaleve të çmuara dhe masa e pastër.

4. Sa masë ka Mjeti prej arit me përsosmëri prej arit me përsosmëri 800 %o dhe masë të pastër të arit
648*g*?

Kemi $x:648 = 1000:800$ dhe prej këtu $x = \frac{648 \cdot 1000}{800} = 810$. Domethënë, masa e përgjithshme e legurës është 810g. ◆

5. Sa masë të përgjitghshme ka Mjeti i argjent me përsosmëri 230 penivejt dhe masë të pastër të argjentit 483*g* ?

Prej proporcionit $x : 483 = 240 : 230$ kemi $x = \frac{483 \cdot 240}{230} = 504$. Masa e përgjithshme e Mjetit të argjen është 504*g*. ◆

6. Cakto masën e përgjithshme të Mjetit të argjent me përsosmëri B1,,12 dhe masë të pastër të argjentit 1341g .◆

Përsësmëria e argjentit është 222 +1, ,12 = 223,,12 ose $223\frac{12}{24} = 223{,}5$ penivejt. Atëherë, prej $x : 1341 = 240:223{,}5$ vijon $x = \frac{1341 \cdot 240}{223{,}5} = 1440$. Domethënë, masa e përgjithshme e Mjetit është 1440g .◆

Detyra për punë të pavarur

1. Sa ar të pastër përmban Mjeti i arit me masë 180*g* dhe përsosmëri 880 ‰?

2. Njehso masën e pastër të argjendit te Mjeti i argjendit me masë 600*g* dhe përsosmëri *W* 22, ,12 .

3*. Mjeti i argjendtë me përsosmëri 850 ‰ përmban 595g argjend të pastër. Sa është masa e përgjithshme?

4*. Mjeti i argjendtë me përsosmëri *W* 1,,3 përmban 324*g* ar të pastër. Sa është masa e përgjithshme?

5*. Mjeti i arit me përsosmëri 750 ‰ përmban 126g ar të pastër. Sa ar të pastër duhet t'i shtohet Mjeti të arit të jetë 800 ‰?

2. 4. Koncepti dhe domethënia e valutës

Fjala valutë, që rrjedh prej fjalës „valuta" ka shumë domethënie. Me këtë koncept nënkuptohet të vlejturit e parave, përkatësisht standard parash në një vend. Vet koncepti ka disa domethënie:

- mund të paraqet **sistemin monetar të vendit të caktuar, me të cilin konstatohet njësia themelore e parave** (emri, forma , përbëja);

- mundet t'i paraqet **paratë efektive dhe shenjat e parave** (para, banknota), si mjet ligjor për pagesa në transaksioinet e brendshme financiare, përkatësisht e shënojnë njësinë themelore të parave, që e bën bazën e sistemit monetar të një vendi;

- në qarkullimin ndërkombëtar, me valutë nënkuptohet vetëm **paratë e huaja efektive,** shenjat e parave të cilët janë prezent (me të cilët disponojnë) rezidentë në vendin e huaj.

Në qarkullimin ndërkombëtar me konceptin valutë janë përfshirë surogatët e parave, sikurse janë: çeqet, faturat, akreditivet ose instrumente tjera të pagesave ndërkombëtare ose sigurime, por vetëm banknotat nacionale dhe monedha si shenja të parave oficiale.

Sipas ligjit për punë devizore në Republikën e Maqedonisë, me valutë të jashtme nënkuptohen të gjitha llojet e parave të huaja efektive, përveç parave të arit të farkëtuara, të cilat trajtohen si metale të çmuara.

Valuta, si njësi parash e bën bazën e sistemit monetar të një vendi, paraqet me ligj njësinë e caktuar që shërben si masë matëse themelore e vlerës së një vendi.

Në çdo vend me akt ligjor konstatohet njësia themelore dhe e përcakton emrin e njësisë themelore të parave (të valutës nacionale). Emrat e valutave të vendeve dallohen (për shembull, hasim, denar, dinar, euro, dollarë, funta, shilinga etj.). Por, gjithashtu hasim emër të njëjtë për pagesë për shumë valuta kombëtare të cilët dallohen sipas të gjitha elementeve tjera (valuta kombëtare dallohet sipas të gjitha elementeve tjera sikurse janë pamja, vlera e brendshme dhe vlera intervalutare etj.). Për shembull, njësia e parave dollar, shfrytëzohet si valutë nacionale në Australi, Kanada, Hong Kong dhe SHBA.

Valuta si njësi themelore e parave ndahet, sipas rregullës, në pjesë më të vogla (para të vogla) ku zakonisht mbajnë emra tjerë, me zbatimin e sistemit dhjetor ose tjetër (për shembull, dollari i SHBA pjesëtohet, me 100 centë, denari i Maqedonisë denari në 100 dena etj.)

Në kohën e sistemeve metalistike, përkatësisht të vlershmërisë së arit, çdo vend me akt autonom, por e varur nga fuqia dhe stabiliteti i vet , caktonte sa sasi të metalit të çmuar do të përmban valuta nacionale. Me këtë, faktikisht, përcaktohet norma e farkimit, përkatësisht është konstatuar sa njësi parash do të farkojnë prej një njësie peshe të metalit të çmuar.

Në kushtet bashkëkohore të ekonomizimit, në asnjë ekonomi nacionale më shumë nuk funksionojnë para me vlerë të plotë materijale. Ato çdokund janë zëvendësuar me shenja të parave, përkatësisht me para letrash. Materiali prej të cilit janë bërë paratë bashkëkohore ka shumë pak vlerë, kështu që shenjat e parave vetvetiu nuk kanë asnjë vlerë. Paratë e letrave përvetësojnë nëpërmjet madhësisë dhe sasisë së mallrave shërbimet që mund të prodhojnë në kuadër të ekonomisë së dhënë nacionale. Vlera e parave të letrës mbahet në nivelin e caktuar dhe me ndihmën e mbështetjes, përkatësisht autoritetit të qeverisë monetare të vendit të dhënë . Qeveria monetare e përcakton vlerën e valutës nacionale me ligj autonom dhe ka për detyrë të siguron mjaft mjete likuide të valutës nacionale për realizimin e pandërprerë të transaksioneve ekonomike në vend.

Të gjitha transaksionet në ekonominë e mallrave realizohen me ndihmën e parave. Prandaj sistemi monetar e koordinon funksionimin e përgjithshëm të ekonomisë, e bazuar në veprimin e prodhimit të mallrave dhe tregut. Jo baraspeshat, që mund të ndodhin në sektorët e ndryshëm të ekonomisë, fitojnë shprehje parash dhe reflektohen si jo baraspeshë e sektorit monetar të ekonomisë.Nga ana tjetër, sektori monetar i ekonomisë mundet edhe vet të jetë sektor në të cilin krijohen jo baraspeshë, të cilët pastaj transmetohen në sektorin real të ekonomisë. Në këtë mënyrë vjen deri te formimi i raportit interaksional ndërmjet veprimit të sektorit monetar dhe real të ekonomisë. Formimi i performansave ekonomike, sikurse janë normat për rritjen ekonomike, norma e unjisimit, norma e inflacionit, norma e eksportit dhe importit etj., realizohet pikërisht nëpërmjet raporteve interaksionale të variablave në sektorin real dhe monetar të ekonomisë.

Detyra për punë të pavarur

1. Sqaro rëndësinë e konceptit valutë.

2. Përkufizo çka është valuta.

3. Prej çka varet vlera e valutës?

4. Si është vlera e parave të letrës?

5. Sqaro konceptin e sistemit monetar dhe qeverisjes monetare.

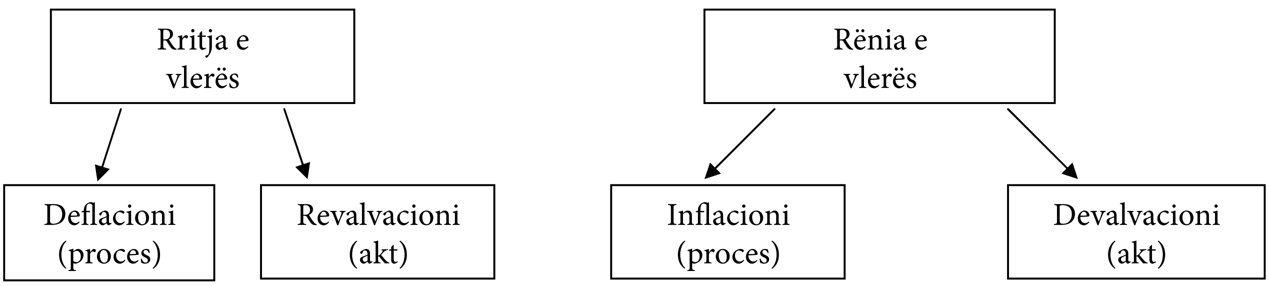
2. 5. Njehsimi i ndryshimeve të vlerës së valutave

Gjendjet në një ekonomi nacionale rregullisht ndryshojnë, ndonjëherë në të mirë, por ndonjëherë në të keqe. Në rastin e zmadhimit të përgjithshëm të produktiviteti në një vend, fuqia e blerjes të valutës nacionale në tregun e vendit do të rritet, edhe pse nuk ka ardhur deri te ndryshimet te vlera e saj oficiale. Kjo dukuri quhet **apresiacioni** e valutës.

Në rastin e kundërt, kur vjen deri te rënia e fuqisë blerëse të valutës nacionale në tregun e vendit, pa ndryshime të kursit oficial,dukuria e atillë quhet **depreciacion**. Nëse dukuritë e këtilla janë prezente në periudhë kohore të gjatë, atëherë çojnë nga hapja e proceseve të deflacionit, përkatësisht të inflacionit. Dalja prej këtyre situatave zgjidhet nëpërmjet ndryshimit të vlerës së valutës nacionale në lidhje me vlerën e valutave të huaja.

Fig. 1.

Ndryshimi i vlerës së valutës nacionale



Ndryshimet në kontinuitet në nivelin e përgjithshëm të çmimeve e imponojnë nevojën për ndryshimin e kursit të valutës nacionale. Kjo do të thotë se, zvogëlimi i vlerës intervalutare e valutës nacionale mund të kryhet me devalvim dhe depresijacion, ndërsa zmadhimi i vlerës intervalutare mund të kryhet me revalvacionin e apresijacionit.

Devalvimi paraqet akt i njëanshëm dhe njëfish i qeverisë monetare, me të cilën bëhet zvogëlimi i vlerës intervalutare të valutës nacionale. **Depresiacionit** paraqet proces të zvogëlimit gradual të vlerës intervalutare të valutës nacionale, të krijuar nëpërmjet rrugës së veprimit të ligjshmërive ekonomike.

Revalvacioni paraqet akt të njëanshëm dhe njëfish të qeverisë monetare, me të cilën kryhet zmadhimi i vlerës intervalutare të valutës nacionale. **Apresiacioni** paraqet proces të zmadhimit gradual të vlerës intervalutare të valutës nacionale të krijuar nëpërmjet rrugës së veprimit të ligjshmërive ekonomike.

Në rastin e deflacionit, qeveria monetare e ekonomisë nacionale, me akt të veçantë të pajtimit të vlerës së valutës nacionale në lidhje me valutat e huaja (revalvacioni i valutës). Në kushtet e inflacionit, qeveria monetare me akt të veçantë e zvogëlojnë kursin oficial të valutës së vendit, me të cilën vlera e saj do të bie, në lidhje me valutat e huaja.

Varësisht prej vlerës vijuese të një valute nacionale në lidhje me valutën tjetër të huaj, shembull euroja në lidhje me dollarin amerikan, vlera e apresijacionit ose depresijacionit të euros në lidhje me dollarin, njehsohet si pjesë e zmadhimit të zmadhimit ose prej zvogëlimit të vlerës së euros.

1. Për shembull, nëse € / $ kursi devizor ndryshon prej €1 = $ 0,93 në €1 = $ 1,09, thuhet se euroja apreson prej ndryshimit të vlerës së saj të dollarit për
(1,09 - 0,93)/0,93 = 17.20 %◆

Formula e përgjithshëm për njehsimin e apresionit ose depresijacionit të euros në lidhje me dollarin është:

1)

Vlera (sasia) e apresijacionit ose depresijcionit të euros	=	Vlera e re e dollarit të euros – vlera paraprfake e dollarit të euros / Vlera paraprake e dollarit të euros

2) vlera e apresijacionit (depresijacionit) të valutës $X\,(€) = \dfrac{e_1 - e_0}{e_0}$

2. *Me zëvëndësimin te shembulli (me e_0 = $ 0,93 dhe e, = $ 1,09) fitohet 17,20% aprecijacion i euros.* ◆

Në mënyrë alternative, mund të njehsohet edhe ndryshimi i euros vlera e dollarit. Nëse vlera e dollarit të euros e shënojmë me “e” (dollars per euro), atëherë vlera e dollarit (euros per dollar) patjetër duhet të jetë repricitet ose „ 1/e”.

3. Për shembull, nëse euroja vlen $ 0,93, atëherë dollari vlen EUR1,075 (1/0,93). ◆

Ndryshimi ieurovlerës së dollarit ndërmjet kohës 0 dhe koha t është $1/e_t$ - $1/e_0$. E shprehur në përqindje, thuhet se dollari depreson (apreson) në lidhje me dollarin prej zmadhimit ose prej zvogëlimit t ë euro vlerës së dollarit.

3)

Vlera (sasia) e apresijacionit depresijacionit të dollarit = $\dfrac{\text{Vlera e re e euros të dollarit – vlera}}{\text{vlera paraprfake e e euros të dollarit}}$

4) vlera e apresijacionit (depresijacion it) të valutës $X (\$) = \dfrac{1/e_1 - 1/e_0}{1/e_0} = \dfrac{e_0 - e_1}{e_1}$

4. Me zbatimin e barazimit 3, fitohet sasia e zmadhimit të euros kursi devizor prej \$0,93 të \$ 1,09, që paraqet depresijacion të dollarit për 14,6% [(0,917—1,075) / 1,075 = —0,146]. ◆

Rregulla për njehsimin e ndryshimit të përqindjes të kursit devizor me vijimin e kohës:

- ndryshimi pozitiv i përqindjes paraqet apresijacion të valutës së huaj;
- ndryshimi negativ i përqindjes paraqet depresijacion të valutës së huaj;

Figura 2

LISTA E KURSIT
PËR PUNË KËMBIMOREJE
Lista e kursit nr.____
Kurset vlejnë prej datës 08.00-20.00 ditën, viti_2000

VENDI	SHIFRA	SHENJA E VALUTËS	PËR	I BLERË PËR EFEKTIVË	I SHITJES PËR EFEKTIVË
BME	978	EUR	1		
AUSTRALIA	036	AUD	1		
KANADA	124	CAD	1		
DANIMARKA	208	DKK	100		
NORVEGJIA	578	NOK	100		
SUEDIA	752	SEK	100		
ZVICRA	756	CHF	100		
ANGLIA	826	GBP	1		
SHBA	840	USD	1		

Burimi: Banka popullore e Republikës së Maqedonisë

Prej shembujve mund të vërehet se ndryshimet të kursit të euro devizor në lidhje me dollarin nuk janë të barabartë me ndryshimin e kursit devizor të dollarit në lidhje me euron. Shkaku për atë është kjo: euro aprasiacioni nuk është i barabartë me sasinë e depresijacionit të dollarit, pasi vlera e njërës valutë paraqet vlerën inverse të valutës tjetër. Prandaj, ndryshimi i përqindjes së vlerës së valutave dallohet për shkak të bazave në bazë të së cilës kryhen njehsime të ndryshimeve.

Detyra për punë të pavarur

1. Sqaro konceptin depresijacion.

2. Çka është devalvimi?

3. Sqaro konceptin apresijacion.

4. Çka është revalvasioni?

5. Kursi i euro/dollar janë ndryshimet gjatë ditës prej 1,45 të 1,53. Njehso përqindjen e ndryshimit të euros (rritja e euros), si edhe përqindja e ndryshimit të vlerës së dollarit.

6. Denari e ka ndryshuar vlerën në lidhje me euron (njëfish) prej 61,5 të 90. Për çfarë ndryshimi bëhet fjalë dhe në çfarë përqindje?

7*. Frangu i Zvicrës apreson në lidhje me euron për 4% (kursi paraprak EUR/CHF 1,33). Cili është kursi momental?

2. 6. Koncepti për devizat

Paratë e një ekonomie nacionale jashtë vendit (në tjetër shtet), paraqiten në dy lloje: në formë të **paratë e jashtme efektive** ose **valuta (foreign currency)** dhe në formë të kërkesës me afat të shkurtër në valutë të jashtme ose **deviza (foreign exchange).**

Koncepti deviza, rrjedh në mënyrë etimologjike prej latinishtes, përkatësisht fjalës spanjolle „d**eviza"** (faturë e jashtme, domethënie e saj primare lidhet me faturë, që duhet paguar jashtë). Zakonisht devizat quhen „hyrëse për tregjet e jashtme" dhe ato janë fletë pagesa të forcës së shitjes jashtë. Kjo do të thotë se rezidenti i jashtëm devizor, fiton deviza të cilat për paraqesin kërkesë për valutën e huaj. Ose, për shembull, rezident i vendit, si kundërthënëse për realizimin e eksportit jashtë, merr letra me vlerë, si deviza që është në valutën e jashtme ku ka eksportuar edhe me të njëjtën të mundet të blen mallra në shtetet e huaja.

Devizat, si kërkesa me afat të shkurtër në valutë të huaj paraqesin mall specifik që blihet dhe shitet të tregun e devizave, si segment i tregut financiar: Për mbajtësin e devizave (rezident i vendit) ato nuk paraqesin para, pasi mbajtësi do të merr para nga vendi, pasi që t'i ketë shitur devizat në tregun e devizave ose do t'i prezanton te ndonjë bankë për pagesë.

Koncepti devizë mund të përkufizohet në kuptimin e ngushtë dhe të gjerë.

Sipas **kuptimit të ngushtë,** devizat janë kërkesa me afat të ngushtë në valutën e huaj, të krijuar sipas cilësdo bazë dhe pa marrë parasysh mënyrën e disponimit me të. Numri më i madh i vendeve e përkapin këtë përkufizim për devizat.

Përkufizimi më i gjerë i devizave, përveç përkufizimit të ngushtë, i përfshijnë edhe mjetet e parave të huaja efektive me të cilat disponojnë rezident e vendit. Kjo arsyetohet me gjykimin se valutat e huaja paraqesin kërkesë të rezidentëve të vendit ndaj bankës qendrore, e cila i emeton këto mjete të parave.

Në Republikën e Maqedonisë është përvetësuar edhe përkufizimi më i gjerë i devizave, që do të thotë se koncepti devizë nënkuptohet kërkesë me afat të shkurtër jashtë vendit që janë në valutë të huaj dhe të gjitha mjetet e parave të huaja efektive, përveç parave të arit të farkuara.

Duke u nisur prej faktit, se devizat mund të shfrytëzohen në qarkullimin e pagesës ndërkombëtare (shërbejnë si medium për arritjen e likuiditetit ndërkombëtar), se ekzistojnë mundësi të ndryshme për shfrytëzimin r konstatimit të vlerave intervalutore të llojeve të veçanta të parave nacionale, devizat do të mundet, prej aspektit ekonomiko-politik, të grupohen në dy grupe: deviza të lira dhe të lidhura.

Devizat e lira përkufizohen si kërkesa në vend të huaj në lloje të atilla të mjeteve të huaja për pagesë, me të cilat pronarët e tyre do të mund të disponojnë lirshëm për pagesë të kërkesave në vendin ose për pagesë në ndonjë vend tjetër. Më së shpeshti si sinonim i devizave të lira përmenden devizat konvertibilet, të shëndoshat ose të ngurta.

Devizat e lidhura janë kërkesë me afat të shkurtër, në mjete të jashtme për pagesë, kërkesa që do të mund të shfrytëzohen vetëm për llojet e pagesave të kontraktuara. Te devizat e lidhura ekziston karakteristikë e kufizimit, që ekziston te pronari i të gjitha llojeve të kërkesave gjatë shfrytëzimit të tyre . Si sinonime të devizave të lidhura më së shpeshti përmenden devizat jokonvertibile, të dobëta, të buta ose të kliringut.

Sipas aspektit të parë, i cili është i lidhur me mundësinë për kryerjen e transferit të kërkesës në të cilin është valuta, devizat e lira janë të lira, që janë në valutë konvertibile dhe që mund të konvertohen, të shndërrohen në kërkesa ma afat të shkurtër në një valutë në kërkesa me afat të shkurtër në valutë tjetër. Nëse devizat nuk e kanë këtë karakteristikë, quhen deviza të lidhura. Përkatësisht, devizat e lidhura janë kërkesa konvertibile. Ato nuk mundet lirshëm të shfrytëzohen për zgjidhjen e borxhit sipas bazës së shkëmbimit ndërkombëtar, por shfrytëzohen për kryerjen e llojeve të pagesave të kontraktuara, ndërmjet dy vendeve sipas kontratës. Faktikisht, devizat e këtilla nuk kanë transfer të lirë, as që mundet të konvertohen prej një lloji në llojin tjetër.

Nga aspekti i aftësisë së tyre për konversion, mund të jenë: deviza konvertibile, jokonvertibile dhe të kliringut. **Devizat konvertibile** janë ato kërkesa me afat të shkurtër që janë në valutë të jashtme dhe që mund të zëvendësohen për deviza tjera ose mjete parash të huaja efektive, në bazë të paritetit më parë të konstatuar. Konvertibiliteti mund të jetë tërësisht ose i kufizuar.

Nëse devizat nuk mund të zëvendësohen për deviza tjera ose mjete të parave të jashtme efektive, bëhet fjalë për **deviza jokonvertibile.**

Devizat e kliringut paraqiten në rastet e raporteve borxhli-kreditor, në bazë të marrëveshjeve bilaterale të përvetësuara nëpërmjet mënyrës së kliringut të pagesës. Saldo pozitive e shkëmbimit të këtillë mundet të barazohet vetëm me blerje në vend-partner, që ka realizuar saldo të kliringut negativ. Këtë e pamundëson saldoja pozitive prej një vendi, për shlyerjen e detyrimeve në shkëmbim me tre vende.

Varësisht prej afatit të pagesës, devizat mund të ndahen në **spote dhe me termin.**

Devizat e spoteve (spot) janë pagesat e devizave, që mund të paguhen menjëherë, ku duhet patjetër të ketë kujdes për regjimin e shfrytëzimit të devizave konkrete, që varet prej llojit të tij.

Deviza me termin nuk janë të paguara, përkatësisht nuk mund të paguhen menjëherë, por duhet të pritet të kalon periudhë e caktuar kohore që prej më parë është kontraktuar. Më së shpeshti devizat blihen për shkak të sigurimit të rizikut të kursit ose pra prej motiveve të spekulimit të pastër, me qëllim të përfitohet në ndryshimet e kursit.

Detyra për punë të pavarur

1. Përkufizo konceptin e devizës në kuptimin më të ngushtë dhe më të gjerë të fjalës.

2. Sqaro ndryshimin ndërmjet valutës dhe devizës.

3. Ndarja e devizave nga aspekti i konvertibilitetit.

4. Sqaro spotet dhe devizat me termin.

5. Devizat e kliringut, koncepti dhe domethënia.

2. 7. Koncepti dhe thelbi i kursit devizor

Kursi devizor, paraqet çmimin e një njësie të valutës së jashtme të shprehur në paratë e vendit.

Prandaj, çdo valutë e jashtme përkatësisht kërkesë me afat të shkurtër, që është në valutë të jashtme, në tregun e vendit paraqet devizë dhe ka çmimin e vet, d.m.th., kursin devizor.

Kursi devizor duhet të dallohet prej kursit paritet (valutor), që paraqet vlerë të konstatuar zyrtare të parave nacionale, të shprehur në ndonjë emërues më të gjerë të përvetësuar (denominator): ar, ndonjë valutë stabile dhe e rëndësishme etj. Në raste normale, kursi devizor lëviz rreth paritetit devizor, si bazë.

Në realitet, kursi devizor paraqet çmim të valutës së vendit të shprehur me valutë të jashtme, përkatësisht sa njësi të valutës së vendit duhet të jepen për njësinë e valutës së jashtëme. Kur kursi shprehet në këtë mënyrë, bëhet fjalë për të ashtuquajturën sistemi i **kotimit direkt.**

Sistemi i kotimit indirekt, e zbaton vetëm Anglia (dhe kolonitë e saja të mëparshme), ku kursi devizor përkufizohet si numër i njësive të valutës së jashtme, që duhet të jepet për njësi të valutës së vendit.[1]

Kursi devizor nominal paraqet çmim të valutës së vendit të shprehur në valutë të jashtme, pa kalkuluar në normën e inflacionit (nuk merret parasysh norma e inflacionit).

Kursi devizor real është kursi devizor nominal, i korrigjuar me normën e inflacionit dhe ai është shumë i rëndësishëm, pasi inflacioni e siguron vlerën e valutës, d.m.th., e zvogëlon fuqinë blerëse të saj. Me korrigjimin e kursit nominal. Me normën efektive, fitohet pasqyra reale e fuqisë blerëse të valutës adekuate.

---

[1] Kursi devizor caktohet direkt kur te valuta e vendit shprehet çmimi i 1 ose 100 valutave të jashtme (1 EUR = 61 denarë) ose në mënyrë indirekte kursi devizor shprehet si çmim të 1 ose 100 njësi të valutës së vendit në valutë të 1 ose 100 njësi të valutës së vendit në valutë l dhe në mënyrë indirekte në valutën e vendit në valutë të jashtme (100 denarë = 1,80 EUR).

Kursi devizor efektiv është mesatare e ponderuar e kursit devizor ndërmjet valutës së vendit dhe valutës së jashtme, e cila është partneri ynë i rëndësishëm.

Pasi ekziston mundësi për falsifikimin e parave efektive, në praktikë bankat veçanërisht e tregojnë lartësinë e **kursit devizor për efektivë,** e cila sipas rregullës është më e ulët se kursi i devizave, për shkak të mundësisë për falsifikimin e parave dhe për shkak të shpenzimeve manipulative për transfer prej një vendi në tjetër vend.

Çdo transaksion ndërkombëtar përbëhet prej dy blerjeve: blerja e mjetit në shkëmbimin ndërkombëtar dhe blerja e valutës. Kjo do të thotë se importuesi prej vendit X, nëse importon mall prej vendit У, ai nuk blen vetëm mall, por patjetër duhet të blen edhe valuta prej vendit У. Kështu vijmë deri te përfundimi, se në shkëmbimin ndërkombëtar formohen çmime të valutave të veçanta nacionale, por jo vetëm të mjetit të shkëmbimit ndërkombëtar.

Këtë mundemi ta paraqesim nëpërmjet këtyre relacioneve:

a) për eksportin: $Ei = Qi \bullet pi \bullet T$ përkatësisht, vlera e eksportit të mallit të caktuar është e barabartë me prodhimin e sasisë së mallit, çmimi i arritur në tregun e huaj të devizave dhe kursit të valutës së jashtme.

b) për importin: $Ui = Qi \bullet pi \bullet T\ \boldsymbol{(1}+ti)$ përkatësisht, vlera e eksportit të mallit të caktuar është e barabartë me prodhimin e sasisë së atij malli, me çmimin e tij të tregut të blerjes dhe kursit të devizës me të cilën paguhet, e zmadhuar për dhënëjet importuese $(1+t_i)$.

Ndonjëherë, kurset devizore dhe valutore shënohen me emrin e përbashkët, **kurse intervalutor.**

Kursi intervalutor paraqet çmim, sipas të cilës kryhet shkëmbimi i parave efektive të një vendi për paratë efektive të vendit tjetër.

Çdo valutë ka paritetin e tij, përkatësisht kursin e vet valutor, që paraqet pikë nisëse në përcaktimin e raporteve intervalutore.

Kurset devizore formohen në tregun devizor nën ndikimin e ofertës dhe kërkuesit të devizave. Oferta dhe kërkesa për deviza e pasqyrojnë gjendjen e bilancit pagesor. Deficiti në bilancin pagesor domethënë se kërkesa për deviza është më i madh se oferta. Suficiti në bilancin pagesor do të thotë se oferta për deviza është më e madhe prej kërkesës.

Detyra për punë të pavarur

1. Çka paraqet kursi devizor?

2. Sqaro kotacionin direkt.

3. Sqaro kotacionin indirekt.

4. Kursi devizor nominal, real dhe efektiv, koncepti dhe domethënia.

5. Çka është kursi intervalutor?

2. 8. Spot transaksione

Transaksioni themelor i tregut devizor është **spot kontrata.**

Spot transaksioni është blerja e një valute për tjetër, me afat të dërgimit dy ditë pune pas datës së nisjes - dilingut (data kur është bërë kontakti). Kjo mundëson të përgatiten dokumentet e nevojshme për transaksion dhe të organizon transferin e gatshëm.

Spot transaksioni është shkëmbimi momental i një valute për tjetrën. **Kursi spot devizor** është kursi momental (i pranishëm) ose çmimi i tregut, çmimi për krahasim. Spot transaksionet nuk kanë rëndësi se menjëherë paguhet (pagesat). Sipas konmventës, data e pagesës ose data e vlerës (settlement date, value date) është dita e dytë e punës pas datës së nisjes (second business day after the „deal date" or „trade date") kur transaksioni është kontraktuar prej dy liderëve. Periudha prej dy ditëve siguron mjaft kohë për të dy anët ta vërtetojnë marrëveshjen dhe të kontraktojnë barazim (kliring ose obligimet e nevojshme dhe lejimi i llogarive bankiere në lokacione të ndryshme).

Si përjashtim, spot transaksioni ndërmjet dollarit të Kanadasë (CAD) dhe dollarit të SHBA (USD), konvencionalisht paguhen një ditë pune pas nisjes (për shkak të Kanadasë dhe SHBA janë në të njëjtën zonë kohore).

Të përsërisim, spot vlen dy ditë pune pas datës së nisjes.

Spot transaksioni paraqet shkëmbim direkt të një valute për tjetrën dhe kur do të kryhen, vijon transferi nëpërmjet sistemit për pagesë të dy vendeve, valutat e të cilave janë involvuar.

Te spot transaksioni tipik, Banka A nga Njujorku kontrakton në 1 qershor të shet 10 milionë dollarë për euro në Bankën B në Frankfurt, sipas kursit të themi 0,785 EUR për dollar, me vlerë prej 3 qershorit. Në 3 qershor, Banka B do të paguan 7,85 milionë EUR në llogari të Bankës A në Gjermani, kurse Banka A do të paguan 10 milionë dollar në llogari të Bankës B në SHBA. Me kryerjen e të dy pagesave kompletohet transaksioni.

Te tregu devizor ekzistojnë **dy çmime për çdo valutë** - njëri çmim sipas të cilës shitësit dëshirojnë të shesin valutë të caktuar dëshirojnë të shesin edhe tjetër çmim sipas të cilës blerësit dëshirojnë të blejnë (kurs blerës dhe shitës). Prej Market-mejkeri arrihet të kuotohet për komitentët e vet të dy kurseve, me të cilën e „bën tregu" (making a market).

Te spot kurset është e rëndësishme të dihet se si kuotohen kushtet e të njëjtët, përkatësisht terminet e kuotimit direkt ose indirekt, evropian ose amerikan etj.

Kotimi i kursit devizor, si çmimi i një valute në lidhje me tjetrën, paraqitet në dy forma: kuotimi direkt që paraqet sasi të valutës së vendit (për shembull, dollari, nëse jeni në SHBA ose denari, nëse jeni në Maqedoni) për njësi të valutës së jashtme dhe e dyta, si kuotimi indirekt që paraqet njësi të valutës së jashtme për njësi ë valutës së vendit (në dollar, nëse jeni prej SHBA ose në dollar, nëse jeni prej Maqedonisë).

Fraza „kushte amerikane" („American terms") do të thotë kuotimi nga pikëpamja e ndonjërit të ndodhur në SHBA, përkatësisht, për dollar, kjo do të thotë se kursi është kuotuar në sasinë e variabilitetit të dollarit (USD) për një njësi të valutës së jashtëme (për shembull. 1,27 për EUR).

Fraza „kushte evropiane" do të thotë kuotacion direkt nga pikëpamja e ndonjë ndodhje në Evropë. Për dollarin, kjo do të thotë sasia e variabilitetit të valutës së jashtëme për një USD (ose EUR 0,785 për $1).

Kur në vitin 1978, tregu devizor integrohet në tregun e vetëm global, për shkak të lehtësimit, praktika e tregut në SHBA është ndryshuar, me iniciativën e brokerëve, që të pajtohet me konvensionet evropiane.

Kështu TTHS tregu në të gjitha vendet tani i kuoton dollarët sipas kushteve të Evropës, kundrejt pothuajse të gjitha valutat tjera (domethënë, sasi e valutës së jashtme për $1). Kjo do të thotë se dollari është pothuajse gjithmonë valutë bazë (base currency), një njësi ($1) blihet ose shitet për sasi variabile të valutës së jashtme.

Ekzistojnë përjashtime prej kësaj rregulle gjenerale, më saktë të gjitha TTHS tregjeve në botë, funta vazhdon të kuotohet si valutë bazike. Prej këtu, market-mejkeri dhe brokerët çdokundi në botë e kuotojnë funtën sterling (GBP) për x dollar për funtë. Anglija nuk e ka përvetësuar sistemin dhjetor valutor deri në vitin 1971 dhe ishte më lehtë matematikisht të kuotohet dhe niset sipas kushteve të sasisë variabile të valutës së jashtëme për funtën, se sa e kundërta. Valutat e caktuara, të cilat historikisht janë të lidhura me GBP, (valuta të Islandës, Australisë dhe Zelandës së Re) kuotohen në TTHS tregun në të njëjtën mënyrë sikurse edhe funta (sasia variabile për një njësi).

Kotimet direkte dhe indirekte janë reciproke dhe lehtë vërtetohen njëri prej tjetrit.

Çdo transaksion devizor përfshin dy valuta dhe këtu është e rëndësishme të dihet se kush është **valuta bazë** (Base Currency, e kuotuar, fiksuar) dhe e cila është **valuta e kushtëzuar** (Terms Currency) ose njehsuese (counter currency).

Sipas rregullës, kursi devizor (exchange rate) ndërmjet dy valutave, për shembull USD dhe JPY shkruhet USD/JPY dhe qëndron si numri i JPY që është i barabartë me 1 USD, ndërsa JPY/USD qëndron si numri i USD i barabartë me 1 JPY.

Kodi i valutës i shkruar në anën e majtë është valuta bazë dhe gjithmonë është njësi.

Kodi i valutës i shkruar në anën e djathtë është valuta variable (njësia njehsuese kushtimore ose valuta e kuotuar). Numri i njësisë së asaj valute është e barababrtë me një njësi të bazës së valutës, në pajtim me kursin.

Gjithmonë shkruhet valuta e bazës së anës së[majtë. Raporti NOK/DKK, për shembull, domethënë numri i DKK për NOK.

1. Kursi CHF/DKK është 4,1235. Nëse blejmë CHF 1 milion, përballë DKK, sa DKK duhet të paguajmë? Numri 4,1235 domethënë numri i DKK për 1 CHF. Prej këtu, duhet të paguajmë DKK 4 123 500:

1 000 000 • 4,1235 = 4 123 500. ◆

2. Nëse në vend të transanksionit paraprak, dëshirojmë të blejmë DKK 1 milion për CHF, sa CHF duhet të paguajmë (kursi CHF/DKK është 4,1235)? Në këtë rast kjo është CHF 242 512,43:

1 000 000 : 4,1235 = 242 512,43. ◆

Valuta variabile është numëruesi, kurse valuta bazë emëruesi. Kur numëruesi rritet, valuta e bazës forcohet dhe bëhet më e shtrenjta. Kur numëruesi zvogëlohet, baza e valutës përforcohet dhe bëhet më e shtrenjta. Kur numëruesi zvogëlohet, valuta e bazës dobësohet dhe bëhet më e lirë. Valuta e bazës gjithmonë tregon e para, te komunikimi gojor.

Kotimi dollar/jen (USD/JPY) domethënë dollari është valuta e bazës dhe emëruesi, kurse jeni është variabile dhe emëruesi. Disa prej valutave kanë edhe pseudonime (funta - Cable, frangu i Zvicrës - Swissie, dollari i Australisë - Assie). Cable është pseudonim për GBP/USD kursin.

Kurset që i kuotuan market-mejkerin gjithmonë janë prej pikës së tij të pikëpamjes (kursi blerës, sipas të cilit ai blen një njësi valuta e bazës dhe shitës, sipas të cilit ai shet për njësinë e valutës së bazës).

Market-mejkeri i pyetur për kursin USD/CHF mund të përgjigjet 1,4975-85, me të cilën tregon se kursi blerës për CHF është1,4975 për dollar dhe çmimi i shitjes prej CHF 1,4985 për dollar. Zakonisht, market mejkeri zakonisht kuotohet 75-85, përkatësisht supozon se komitenti din se numri më i madh („big figure") është 1,49. Kursi blerës është gjithmonë i pari, prej anës së majtë është edhe më i ulët prej kursit të shitjes gjithmonë (nga ana e djathtë). Ndryshimi quhet marzha rrjeti (spread).

Kursi i blerjes dhe i shitjes shprehen në katër dhjetore, përkatësisht e njëqindta pjesë e 1% ose 1/10 000 prej valutës variabile dhe quhet ***pips.*** Te disa valuta, të cilat kanë vlerë absolute të vogël, sikurse jeni, mund të kotohet me dy dhjetore dhe pipsi është 1/100 prej valutës variabile. Në çdo treg pips ose tik është sasia më e vogël e ndryshimit të çmimit.

Detyra për punë të pavarur

1. Çka është spot transaksion?

2. Sqaro spot kursin devizor?

3. Çka është baza, por çka është valuta?

4. Blejmë 100 000 EUR me dollar (kursi është EUR/USD 1,44). Sa dollarë duhet të paguajmë?

5*. Blejmë 100 000 USD me euro (kursi EUR/USD 1,46). Sa euro duhet të paguajmë?

2. 9. Si kuotohen spot kurset

Kur kuotohen përballë euros (EUR), është praktikë në tregun ndërkombëtar të kuotohen më shumë valuta, në kushte të numrit të ndryshëm të njësive të valutës, për 1 EUR. Me fjalë tjera, EUR është valutë e bazës, nëse një ose dy valuta janë përfshirë.

Ngjashëm, përveç EUR, si marrëveshje ndërbankare është të kuotohen të gjitha valutat ndaj USD si valutë e bazës.

Edhe pse dilingu është i mundshëm ndërmjet çfarëdo dy valutave konvertibile, për shembull, NZD ndaj EUR ose CHF ndaj JPY, tregu ndërbankar, historikisht më së shumti kotohet ndaj USD, me të cilën redukohet numri i kurseve individuale të cilët duhet të kuotohen. Kurset devizore ndërmjet çafrëdo dy jo- USD valuta mund të njehsohen prej kursit të çdo valute përballë USD.

Kurse ndërmjet çfarëdo dy jo -USD valuta janë të njohur si **kurse të kryqëzuara (cross-rate).**

Sot termini kurse të kryqëzuara shfrytëzohen si shprehje për çfarëdo kurse devizore, të cilat të njehsuara prej dy kurseve tjera si shprehje për çfarëdo kurse devizore, të cilat janë të njehsuara prej dy kurseve tjera, për shembull, GBP/SEK kurs mund të njehsohet me kombinim të EUR/GBP kurs dhe EUR/SEK kurs.

Tregëtimi me kurse të kryqëzuara (Cross Rate Trading) paraqet shkëmbim të valutave, te të cilët dollari nuk është valutë as bazik as variabil, për shembull EUR/JPY (EUR-bazike, JPY- variabile).

Si edhe në tregjet tjera, bankat normalisht kotojnë dy çmime, të cilat tregojnë deri te cili nivel ato përgatiten të blejnë valutë bazike përballë variabioles (kursin blerës - **bid**- për valutën bazike është kursi më i ulët) dhe niveli për të cilin është përgatitur të shet valutë bazike për valutën variabile (kursi shitës, **offer (ask)**- të valuitës bazike, përkatësisht kursi më i lartë).

3. Nëse banka është përgatitur të blen USD për 1,4375 CHF dhe shet USD për 1,4385 CHF, USD/CHF kursi do të kotohet sikurse 1,4375/1,4385. ◆

Ndryshimi ndërmjet të dy anëve të kuotimit është i njohur si marzhë („spread").
Bid është çmimi prej të majtës, sipas së cilës banka e cila kotohet e blen valutën bazike. Offer është çmimi prej të djathtës, sipas të cilës banka e cila kotohet e shet valutën bazike. Prandaj është ndryshimi ndërmjet bid dhe offer (kuirsi blerës dhe shitësп).

Ekzistojnë edhe **kurse reciproke.** Cilido kotim i valutës së caktuar si valutë bazike, mund të jetë e konvertuar në kotimi ekuivalent, me valutë sikurse valuta variabile, me vlerën e saj reciproke.

4. USD/CHF kotimi prej 1,4375/1,4385 mund të konvertohet në CHF/USD kotimi prej (1:1,4375)/(1:1,4385). Sido që të jetë, ato përsëri mund të jenë të kuotuara me numrin më të vogël prej anës së majtë, kështu që dy anët e kuotimit janë të kundërta: 0,6952/0,6957. Në rastin tjetër, banka blen valutë bazike përballë valutës variabile prej të majtës dhe shet valutë bazike për variabilen prej djathtas. ◆

Kurset në mënyrë tipike kuotohen si $\frac{1}{100}$ (e qindta pjesë) prej centit.

Kjo sasi njihet si point ose pip (poen ose pip). Për shembull, USD/CHF kursi zakonisht do të kuotohen si numër katër dhjetor - 1,4375/1,4385. Kjo varet prej madhësisë së numrave dhe në rastin e USD/JPY, për shembull, marrëveshje është të shfrytëzohen 2 dhjetore. Në USD/JPY kuotacioni është 105,05/105,15, ku 15 poenë domethënë 0,15 JPY, por në të dy rastet, një poen është ajo njësi të numrit dhjetor të fundit.

5. Kur niset me USD/CHF në sasinë prej USD 1 milion, vlera e një poeni është CHF 100. Со други зборови, CHF 100 është madhësia e profitit ose humbjes të bërë prej dilit, nëse kursi devizor zhvendoset për një poenë:

1 000 000 • CHF 0,0001 = CHF 100. ◆

Pika (point) është një njësi prej dhjetores së fundit prej kursit devizor. Kursi devizor zakonisht kuotohet në poenë ose pipsa, më së shpeshti me dy dhjetoret e fundit.Numrat e mëdhenjë (big figure) jnaë pjesa e parë prej kursit devizor, pa poenët.

Detyra për punë të pavarur

1. Sqaro kursin blerës-shitës?

2. Çka janë kurset e kryqëzuara?

3. Çka është pips?

4. Çka është spred (marzhi)?

5*. Kursi EUR/USD është 1,44 - 1,46. Tregoje kursin reciprok.

2. 10. Profiti dhe humbja

Që të realizohet profiti prej dilingut, qëllimi i bankës është ta shet valutën bazike, sipas kursit më të lartë që është i mundshëm përballë valutës variabile dhe ta blen valutën bazike sipas çmimit më të lartë.

1. Kursi USD / CHF është 1,483/1,485
Tregëtia 1: Banka blen USD 1 000 000 për CHF sipas 1,4830
Tregëtia 2: Banlka shet USD 1 000 000 për CHF sipas 1,4855
Vijimi i paras (cash flows)

	USD	CHF
Tregëtia 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 483 000
Tregëtia 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 485 500
Neto rezultati:		+ CHF 2 500

Banka ka bërë profit prej CHF 2 500. ◆

2. Blejmë USD 1 milon për CHF kur spoti USD/CHF është 1,5835. Më vonë, të njëjtën ditë e mbyllim pozicioni e vet me shitjen e USD 1 milion kur spoti USD/CHF është 1,5836. Me këtë realizojmë profitin prej 1 poenë prej 1 poen.

Vijimi i parasë (cash flows)

	USD	CHF
Tregëtia 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 583 500
Tregëtia 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 585 600
Neto rezultati:		+ CHF 100

Prej këtu, vlera e 1 poeni të USD/CHF në dil prej USD 1 milion është CHF 100. ◆

3. Blejmë USD 1 milion për JPY kur spoti i kursit është USD/JPY është 118,35. Më vonë, të njëjtën ditë, e mbyllim pozicionin me shitjen e USD 1 milion, përsëri kur spot çmimi USD/JPY është 118,36. Këtë realizojmë profit prej 1 poen.

Vijimi i parasë (cash flows)

	USD	JPY
Tregëtia 1:	+ USD 1 000 000	- JPY 118 350 000
Tregëtia 2:	- USD 1 000 000	+ JPY 118 360 000
Neto rezultati:		+ JPY 10 000

Prej këtu, vlera e 1 poeni të USD/JPY në dil me USD 1 milion është JPY 10 000. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Kursi EUR/CHF është 1,32 - 1,34. Nëse pas kursit janë blerë dhe shitur 20 000 CHF me spredin e dhënë, sa profit është realizuar?

2*. Person fizik ka blerë 10 000 EUR sipas kursit të shitjes prej 61,70 МКД. Pas një periudhe i ka shitur 10 000 EUR sipas kursit të shitjes prej 61,40 DK M. Kush është neto-rezultati?

2. 11. Mbajtja e pozicionit

Në çdo kohë dileri duhet të din cili është pozicioni i tij (mbajtja e pozicionit -position keeping) – neto rezultati i të gjitha tregëtimeve të tija, që i ka bërë gjatë ditës. Ai, gjithashtu, duhet të din cili është **kursi mesatar devizor** për neto-pozicionin e tij, kështu që të mund të krahason me kursin devizor aktual të tregut, që të vëren pozicionin e tij a është profitabil ose jo. Në fund të ditës ai patjetër duhet ta mbaron pozicionin, por në atë rast është e nevojshme të bën **marking to market** të pozicionit, përkatësisht të njehson **profitin e pa realizuar ose humbje** të pozicionit deri më tani. Ajo arrihet nëpërmjet njehsimeve sa duhet të jetë profiti ose humbja. Nëse ju faktikisht e mbyllni pozicionin sipas normës aktuale (current rate), përkatësisht në fund të ditës.

1. Keni ndërmarrë 3 spot tregëtime për USD/CHF sipas kësaj:

Shitja e USD 4 milion nga 1,6723

Blerja e USD 1 milion nga 1,6732

Blerja USD 5 milion nga 1,6729

Tregu mbyllet sipas kursit USD/CHF 1,6730.

Si është pozicioni i juaj? Cili është kursi mesatar për pozicionin e atillë? Sa është neto profiti i juaj ose humbja?

	USD	CHF
	- 4 000 000 nga 1,6723	+ 6 689 200
	+ 1 000 000 nga 1,6732	- 1 673 200
	+ 5 000 000 nga 1,6729	- 8 364 500
Pozicioni	+ 2 000 000	- 3 348 500

Norma mesatare $\frac{3\ 348\ 500}{2\ 000\ 000} = 1{,}67425$

	- 2 000 000 nga 1,6730:	+3 346 000
Humbja:		-2 500

Pozicioni është më shumë blerje USD 2 milion. Norma mesatare është 1,67425, humbja është CHF 2 500. Humbja mund të jetë e shprehur edhe në USD me konverzion në USD pas spot kursin, ose në cilëndo valutë, me konverzion sipas normës përkatëse të spotit. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Në ora 10 spot kursi EUR/NOK është 7,44 (kotacioni është për 100 NOK). Shesim NOK 500 000 sipas atij kursi, por në ora 14 kursi EUR/NOK është 7,66. Në ora 19 vijon se ndryshimi i ri i kursit dhe ai është EUR/NOK 7,35. Paraqiti profitin ose humbjen në të dy terminet.

2. Keni ndërmarrë 3 spot tregtie për USD/CHF sipas kësaj:

Të blera CHF 100 000 nga USD/CHF 1,041

Të shitura CHF 200 000 nga USD/CHF 1,038

Të blera CHF 300 000 nga USD/CHF 1,039

Tregu mbyllet nga USD/CHF 1,045

Si është pozicioni i juaj? Cili është kursi mesatar për pozicionoin e atillë? Sa është neto profiti i juaj ose humbja?

3. Kursi i blerjes së këmbimores për USD është 49.50 kurse kursi i vazhduar është 50,00 DMK. Sa është përfitimi i blerjeve dhe shitjeve 200 USD?

4. Janë blerë 100.000 EUR me USD sipas kursit EUR/USD 1,40. Tani kursi EUR/USD është 1,23. Sa është humbja nëse tani janë shitur eurot?

5. Janë blerë 10.000 AUD, sipas kursit EUR/AUD 1,44 në ora 10. Në ora 12 kursi është 1,45, kurse në ora 15 është 1,437. Kur duhet të shiten dollarët e australisë që të realizohet profiti?

2. 12. Detyra për ushtrime

1. Shprehe, në mënyrë angleze, përsosmërinë e arit prej 820 ‰.

2. Shprehe, në mënyrë promile, përsosmërinë e arit *W* 7, ,2,4.

3. Shprehe, në mënyrë promile, përsosmërinë e argjentit *W* 10,,12.

4. Mjeti i argjent e ka masën 600*g* dhe përmban 480*g* argjent të pastër. Shprehe përsosmërinë e argjentit me mënyrën:

a) promile ; b) angleze.

5. Mjeti i arit me përsosmëri B 1,,2 e ka masën 120*g*. Sa është masa e përgjithshme?

6. Mjeti i argjent me përsosmëri 750 ‰ përmban 222*g* argjent të pastër. Sa është masa e përgjithshme?

7*. Njehso përsosmërinë e legurës së arit të bërë prej 500g ar me përsosmëri 900 ‰ dhe 750*g* ar me përsosmëri 850 ‰.

8*. Njehso përsosmërinë e legurës prej argjenti të bërë prej 100g argjent të pastër, 100*g* bakër dhe 500*g* argjent me përsosmëri 204 penivejtë.

9. Kursi dollar/frank është ndryshuar gjatë ditës prej 1,21 në 1,23. Njehso përqindjen e ndryshimit të dollarit (rritja e dollarit), si edhe përqindja e ndryshimit të vlerës së frankut.

10. Denari e ka ndryshuar vlerën në lidhje me dollarin, gradualisht prej 61,5 në 75. Për çfarë ndryshimi bëhet fjalë dhe në çfarë përqindje?

11. Euroja apreson në lidhje me frankun e zvcërës për 5% (kursi paraprak EUR/CHF 1,33). Kush është kursi momental?

12. Në ora 10 spot kursi i EUR/USD është 1,44. Shesim USD 5 000 sipas atij kursi, kurse në ora 14 kursi EUR/USD është 1,46. Në ora 19 vijon ndryshimi i ri i kursit dhe ai është EUR/USD 1,43. Paraqiti profitin ose humbjen në të dy terminet.

13*. Keni ndërmarrë 3 spot tregëtime për EUR/AUD sipas kësaj:

Janë blerë AUD 100 000 nga 1,622
Janë shitur AUD 300 000 nga 1,632
Janë blerë AUD 600 000 nga 1,641
Tregu mbyll nga 1,635

Si është pozicioni i juaj? Cili është kursi mesatar për pozicionin e atillë? Sa është neto profiti os humbja e juaj?

Pasqyra tematike

Elementet ar, argjend, platinë zhivë rutenium, rodium osmium dhe iridium të njohur si **metale të çmuara.**

Përzierja prej dy ose më shumë metale quhet **legurë.** Masa e metalit të çmuar legurën do ta quajmë edhe **masa e pastër,** ndërsa masën e legurës do ta quajmë **masa e përgjithshme.**

Raporti i masës së metalit të çmuar (masa e pastër) dhe masa e legurës (masa e përgjithshme) quhet **përsosshmëri** i metalit të çmuar. Të shprehurit e përsosshmërisë së metalit të çmuar kryhet në dy mënyra: **promil** dhe **anglisht.**

Nëse e shënojmë masën e përgjithshme me m , masën e pastër me m_b dhe përsosmërinë me f atrëherë të shprehurit e përsosmërisë në mënyrë promile është sipas formulës:

$$\boxed{f = \frac{m_b}{m} \cdot 1000 \text{‰}}$$

Sipas mënyrës angleze të të shprehurit, përsosshmëria shprehet me **karatë,** kurse përsosshmëria e argjentit në **penivejt.**

Ari me përsosshmëri 22 karatë quhet **arë standard,** kurse argjenti me përsosshmëri 222 penivejtë **argjend standard.** Nëse legura e arit (e argjentit) është më e mirë prej arit standard (argjentit), shfrytëzohet shenja B (prej anlishtes. Better – më i mirë), përkatësisht W (prej anglishtes. Worse – më i keq) nëse është më i keq.

Valuta, si njësi parash e bën bazën e sistemit monetar të një vendi, paraqet me ligj njësi e caktuar që shërben si masë matëse themelore e vlerës së një vendi.

Në rastin e zmadhimit të përgjithshëm të produktiviteti në një vend, fuqia e blerjes të valutës nacionale në tregun e vendit do të rritet, edhe pse nuk ka ardhur deri te ndryshimet te vlera e saj oficiale. Kjo dukuri quhet **apresijacija** e valutës.

Në rastin e kundërt, kur vjen deri te rënia e fuqisë blerëse të valutës nacionale në tregun e vendit, pa ndryshime të kursit oficial,dukuia e atillë quhet **deprecijacion.**

Devalvimi paraqet akt i njëanshëm dhe njëfish i qeverisë monetare, me të cilën bëhet zvogëlimi i vlerës intervalutare të valutës nacionale.

Revalvacioni paraqet akt të njëanshëm dhe njëfish të qeverisë monetare, me të cilën kryhet zmadhimi i vlerës intervalutare të valutës nacionale.

Paratë e një ekonomie nacionale jashta vendit (në tjetër shtesht), paraqiten në dy lloje: në formë **paratë e jashtëme efktive** ose **valuta (foreign currency)** dhe në formë të kërkesës me afat të shkurtër në valutë të jastëme ose **deviza**

Me konceptin **devizë** nënkuptohet kërkesë me afat të shkurtër jashta që një valutë të huaj dhe të gjitha mjetet e jashtëme të parave janë efektive, përveç paratë e arit të farkëtuara.

Devizat do të mund të grupohen, prej aspektit ekonomik - politik, në dy grupe: **deviza të lira** dhe **lidhura.** Nga aspekti i aftësisë së tyre për konverzion mund të jenë: **deviza konvertibile , jokonvertibile** dhe **deviza kliringu.** Varësisht prej afatit të pagesës, devizat mund të ndahen në **prompti dhe me termin.**

Kursi devizor, paraqet çmim të një njësie të valutës së jashtëme të shprehur me para të vendit. Në realitet, kursi devizor paraqet çmim të valutës së vendit të shprehur në valutë të jashtëme, përkatësisht sa njësi të valutës së vendit duhet të jepen për njësinë e valutës së jashtëme. Kur kursi shprehet në këtë mënyrë, bëhet fjalë për të ashtuquajturën sistem të **kotimit direkt.** Sipas **sistemit të kotimit indirekt,** kursi devizor përkufizohet si numër të njësive të valutës së jashtëme, që duhet të jepen për njësi të valutës së vendit. **Kursi devizor nominal** paraqet çmim të valutës së vendit të shprehur në valutë të jashtëme, pa kalkuluar në normën e inflacionit. **Kursi devizor real** është kurs devizor nominal, i korrigjuar me normën e inflacionit. **Kursi devizor efektiv** është mesatare e ponderuar e kurseve devizore ndërmjet valutës së vendit dhe valutës së jashtëme, që është partner i ynë tregëtar i rëndësishëm. Pasi ekziston mundësi për falsifikimin e parave efektive, në praktikë bankat në veçanti e tregojnë lartësinë e **kursit devizor për efektivë.**

Çdo transaksion ndërkombëtar përbëhet prej dy blerjeve: blerja e mjetit në shkëmbimin ndërkombëtar dhe blerja e valutës. Kështu në shkëmbimin ndërkombëtar formohen çmime të valutave të veçanta nacionale, por jo vetëm të mjetit të shkëmbimit ndërkombëtar. Këtë mundemi ta paraqesim nëpërmjet këtyre relacioneve:

a) për eksportin: $Ei = Qi \bullet pi \bullet T$ përkatësisht, vlera e eksportit të mallit të caktuar është e barabartë me prodhimin e sasisë së mallit, çmimi i arritut në tregun e huaj të devizave dhe kursit të valutës së jashtëme.

b) për importin: $\mathrm{Ui} = Qi \bullet pi \bullet T\ (\mathbf{1}+ti)$ përkatësisht, vlera e eksportit të mallit të caktuar është e barabartë me prodhimin e sasisë së atij malli, me çmimin e tij të tregut të blerjes dhe kursit të devizës me të cilën paguhet, e zmadhuar për dhënëjet importuese $(1+ti)$.

Ndonjëherë, kurset devizore dhe valutore shënohen me emrin e përbashkët, **kurse intervalutor.** Kursi intervalutor paraqet çmim, sipas të cilës kryhet shkëmbimi i parave efektive të një vendi për paratë efektive të vendit tjetër.

Spot transaksioni është blerja e një valute për tjetër, me afat të dërgimit dy ditë pune pas datës së nisjes - dilingut (data kur është bërë kontakti).Kjo mundëson të përgatiten dokumentet e nevojshme për transaksion dhe të organizon transferin e gatshëm.

Spot kursi devizor është kursi momental (aktual) ose çmimi i tregut, çmim për krahasim.

Spot transaksionet paraqesin shkëmbim direkt të një valute për tjetrën edhe kur do të kryhen, vijon transferi nëpërmjet sistemit për pagesë të dy vendeve, valutat e të cilave janë involvuar.

Në tregun devizor ekzistojnë **dy lloje të çmimeve për çdo valutë** – një çmim sipas të cilës shitësit e valutës së caktuar dëshirojnë të shesin edhe çmim tjetër sipas së cilës blerësit dëshirojnë të blejnë (kursi i blerjes dhe i shitjes). Te spot kurse është e rëndësishme të dihet se si të njëjtit kuotohen, përkatësisht terminet kuotohen në mënyrë direkte dhe indirekte, kushte evropiane dhe amerikane etj.

Kotimii kursit devizor, si çmim të një valute në lidhje me tjetrën, paraqitet në dy forma: **kuotimi direkt** e cila paraqet sasi të valutës së vendit për njësinë e valutës së jashtëme dhe e dyta, si **kuotim indirekt** që paraqet njësi të valutës së jashtëme për njësi të valutës së vendit.

Çdo transaksion devizor përfshin dy valuta dhe këtu është e rëndësishme të dihet cila është **valuta bazike** dhe cila është **valuta e kushtëzuar.**

Kurse ndërmjet cilësdo dy jo -USD valutë janë të njohura si **kurse të kryqëzuara.** Ekzistojnë edhe **kurse reciproke.** Çfarëdo kotimi të valutës së caktuar si valutë bazike, mund të jetë konvertuar në kotim ekuivalent, me valutë si valutë variable, me vlerën e tij reciproke.

Pika është një njësi prej dhjetores së fundit prej kursit devizor.

Në çdo kohë dileri duhet të din cili është **kujrsi devizor mesatar** për neto-pozicionin e tij, kështu të mund të krahason me kursin devizor aktual të tregut, që të vëren pozicioni i tij a është profitabil ose jo.Në fund të ditës, ai nuk është patjetër ta mbyll pozicionin, por në këtë rast është e nevojshme ta njehson **profitin e pa realizuar ose humbjen** të pozicionit deri më tani. Këto janë arritjet nëpërmjet njehsimeve se sa duhet të jetë profiti ose humbja, nëse ju faktikisht e mbyllni pozicionin sipas normës aktuale, përkatësisht në fund të ditës.

3 BARAZIMET EKSPONENCIALE DHE LOGARITMIKE

3. 1. Koncepti për fuqi me tregues real

Të mësuarit tend të gjertanishëm të matematikës je njohur me konceptet fuqi me numër real pozitiv *a* në rastin kur treguesi i fuqisë është numër natyror, numër i plotë ose numër iracional. Të përkujtohemi.

1. Kryej operacionet e shënuara me fuqi:

a) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}:x^{-0,5}$ b) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$ c) $9^{-\frac{1}{2}}+0,25^{-\frac{3}{2}}$

Prej përkufizimit të fuqisë me treguae racional dhe vetitë e fuqisë me tregues racional kemi:

a) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}}:x^{-0,5}=x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-(-0,5)}=x^{\frac{23}{12}}$

b) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})=(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=x-y$

c) $4^{\frac{1}{2}}+0,25^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{4}+\dfrac{1}{\sqrt{0,25^3}}=2+\dfrac{1}{0,125}=2+8=10$

Në këtë mësim do të përkufizojmë fuqinë me tregues real, i cili paraqet zgjerimin e përkufizimit për fuqi me tregues racional dhe do të njihemi me disa veti themelore të fuqive me tregues real.

Për çdo numër real *x* dhe çdo numër real pozitiv *a* është caktuar fuqi me tregues real a^x në këtë mënyrë.

I. Nëse $x > 0$ dhe

1. $x = n$, atëherë $a^x = \begin{cases} a & \text{për } n=1 \\ \underbrace{aa...a}_{n} & \text{për } n>1 \end{cases}$

2. $x=\dfrac{1}{n}$, atëherë $a^x=\sqrt[n]{a}$

3. $x=\dfrac{k}{n}$, $k\in\mathbb{N}$, atëherë $a^x=\sqrt[n]{a^k}$

4. $x = c_0, c_1c_2...c_n...,$ atëherë

a) për $a > 1$, kemi $a^{c_0,c_1c_2...c_n} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}$

b) për $0 < a < 1$, kemi $a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...c_n}$

c) për $a = 1$, kemi $a^x = 1$

II. Nëse $x = 0$ atëherë $a^x = 1$

III. Nëse $x<0$ atëherë $a^x=\dfrac{1}{a^{|x|}}$

2. a) Në pajtim me përkufizimin e sipërm të fuqisë me tregues real shprehja 5^{-x}, për $x > 0$, ka kuptim , pasi $a = 5 > 0$, ndërsa shprehja $(-5)^{-x}$, për $x > 0$, nuk ka kuptim, pasi $a = -5 < 0$.

b) Shprehja 0^{-x}, për çdo $x \in$ R, dhe 0^{x}, për çdo $x \in$ R, nuk kanë kuptim për $a = 0$. ♦

Për fuqinë e numrit real pozitiv a me tregues real vlejnë këto veti:

1. $a^x = b^x$, për çdo $x \in$ R nëse dhe vetëm nëse $a = b$

2. Për çdo $x \in$ R ekziston fuqi e vetme a^x

3. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ për çdo $x,y \in$R

4. $(a^x)^y = a^{xy}$ për çdo $x, y \in$ R

5. $(ab)^x = a^x b^x$ për çdo $x \in R$

3. Drejtpërdrejt prej përkufizimit të fuqisë me tregues pozitiv dhe vetitë e sipërme vijon se

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = (ab^{-1})^x = a^x(b^{-1})^x = a^x b^{-x} = \frac{a^x}{b^x}. \ ♦$$

4. Kryej operacionet e shënuara me fuqi:

a) 3^x4^x; b) 4^z: 2^z; c) $(8^x9^y15^z):(2^{x3y}5^z)$.

Kemi

a) $3^x\, 4^x = (3 \cdot 4)^x = 12^x$; b) $4^z : 2^z = \left(\frac{4}{2}\right)^z = 2^z$;

c) $(8^x9^y15^z):(2^x3^y5^z) = \left(\frac{8}{2}\right)^x\left(\frac{9}{3}\right)^y\left(\frac{15}{5}\right)^z = 4^x3^y5^z$. ♦

Detyra për punë të pavarur

1. Si përkufizohet fuqia me tregues real?

2. Kryej operacionet e shënuara me fuqi:

a) 2^x2^y ; b) $2^x : 4^x$; c) 12^x11^x; ç) $(2^x5^x)^y$

3. Krahasoi fuqitë:

a) 3^x dhe $9^{x/2}$; b) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ dhe $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$

4*. Cili prej numrave është më i madh te pabarazimet e dhëna, *x* ose *y ?*

a) $0{,}4^x > 0{,}4^y$; b) $^{1,4x} > 1{,}4^y$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$.

5. Kryej operacionet:

a) $(2^x + 3^x)(2^x - 3^x)$; b) $(5^x - 5^{-x})^2$; c) $(4^x + 1)^3$.

3. 2. Barazimet eksponenciale

Përkufizimi 1. Barazime te të cilat e panjohura gjendet te treguesi i fuqisë quhen **barazime eksponenciale.**

1. Barazime eksponenciale janë, për shembull, barazimet:

$$2^x = 8,\quad 4^{x-3} = x-2,\quad 2{,}3^{x+3} = 5\cdot 3^x + 49 \text{ dhe } x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3.\ ♦$$

Në vazhdim do të zgjidhim disa lloje të barazimeve eksponenciale.

1. Barazime të llojit $A^x+m = 0$, $A>0$, $A\neq 1$, $m<0$

2. Zgjidhe barazimin $3^x = 27$.

Barazimin e dhënë $3^x = 27$ e shkruajmë në formën $3^x = 3^3$, ku fitojmë barazim ekuivalent me barazimin e dhënë. Pastaj do të shfrytëzojmë njërën prej vetive të fuqisë me tregues numër real pozitiv *a* me tregues real, përkatësisht:

$a > 0,\ a \neq 1,\ a^{x_1} = a^{x_2}$ nëse dhe vetëm nëse $x_1 = x_2$.

Në këtë kuptim $3^x = 3^3$ nëse dhe vetëm nëse $x = 3$, prej ku përfundojmë se barazimi $3^x = 27$ ka zgjidhje të vetme $x = 3$. ♦

3. Zgjidhi barazimet:

a) $4^x = \frac{1}{16}$ b) $5^x = 1$ c) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125}$.

$4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ $5^x = 5^0$ $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^3$

$4^x = 4^{-2}$ $x = 0$ $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$

$x = -2$ $x = -3$. ♦

II. Barazime të llojit $A^{f(x)}+m=0,\ A>0,\ A\neq 1,\ m<0$

4. Zgjidhi barazimet:

a) $3^{x+5}=81$

$3^{x+5}=3^4$

$x+5=4$

$x=-1$

b) $2^{3x-1}=32$

$2^{3x-1}=2^5$

$3x-1=5$

$x=2$

c) $3^{x^2}=81$.

$3^{x^2}=3^4$

$x^2=4$

$x=\pm 2$. ♦

III. Barazimet e llojit $a(A^{f(x)})^2+6A^{f(x)}+c=0$

Me zëvendësimin $A^{f(x)}=t$ e fitojmë barazimin katror $at^2+bt+c=0$. Për çdo zgjidhje të barazimit katror e zgjidhim barazimin eksponecial $A^{f(x)}$.

5. Zgjidhi barazimet:

a) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$

$(2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

zëvendësimi $2^x=t$

$t^2-6t+8=0$

$t_1=8,\ t_2=2$

$2^{x_1}=8,\ 2^{x_2}=2$

$2^{x_1}=2^3,\ 2^{x_2}=2^1$

$x_1=3,\ x_2=1$

б) $16^x-3\cdot 4x+2=0$

$(4^x)^2-3\cdot 4x+2=0$

zëvendësimi $4^x=t$

$t^2-3t+2=0$

$t_1=2,\ t_2=1$

$4^{x_1}=2,\ 4^{x_2}=1$

$2^{2x_1}=2^1,\ 2^{2x_2}=2^0$

$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=0$

в) $12\sqrt[2x]{81}-\sqrt[x]{81}=27$.

$12\sqrt[2x]{81}-\left(\sqrt[2x]{81}\right)^2=27$

zëvendësimi $\sqrt[2x]{81}=t$

$12t-t^2=27$

$t^2-12t+27=0$

$t_1=9,\ t_2=3$

$9^{\frac{1}{x_1}}=9^1,\ 3^{\frac{2}{x_2}}=3^1$

$x_1=1,\quad x_2=2$ ♦

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi barazimet:

a) $9^x=\frac{1}{729}$; b) $5^x=\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)^{10}$; c) $\left(\sqrt{10}\right)^x\cdot 0{,}1=1000$;

ç) $\left(\frac{4}{5}\right)^x-\frac{125}{64}=0$; d) $10^{\frac{4}{x}}=10^{x-3}$; e) $4^x=\frac{81}{1296}$.

2. Zgjidhi barazimet:

a) $16^{x-0{,}5}=32^{14-x}$; b) $2\cdot 5^x=50$; c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\frac{125}{64}=0$; ç) $\frac{0{,}125}{4^{3-2x}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

3. Zgjidhi barazimet:

a) $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0$; b) $49^x + 4\cdot 7^x - 5 = 0$; c) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

4*. Zgjidhi barazimet:

a) $3^{4\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$; b) $15\cdot 2^{x+1} + 15\cdot 2^{-x+2} = 135$; c) $\dfrac{4^x + 1}{4^{x+1} - 2} = 2^{2x+1} - 1$.

5*. Zgjidhi barazimet:

a) $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} = 12$; b) $3^{4x+8} - 4\cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$; c) $\dfrac{9}{2^{x-2}} = \dfrac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$.

3. 3. Koncepti për logaritëm

Përkufizimi 1. Le të jetë $a \in$ R, $a > 0$, $a \neq 1$ dhe $b \in$ R+. Numri real x ashtu që $a^x = b$ quhet **logaritëm** prej b me bazë a. Shkruajmë $x = \log_a$ b.

Prandaj, për $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$,

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$$

Drejtpërdrejt prej përkufizimit vijon se

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Numri x quhet **logaritëm,** numri a quhet **baza e logaritmit,** kurse numri b quhet **logaritmand.**

1. Kontrollo vlerat në tabelë.

Koncepte	log2 8 = 3	log5(m + 3) = 2	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$
Logaritëm	3	2	4
Baza e logaritmit	2	5	$\frac{1}{3}$
Logaritmandi	8	m + 3	$\frac{1}{81}$

2. a) $\log_3 9 = 2$, pasi $3^2 = 9$; b) $\log_4 2 = \dfrac{1}{2}$, pasi $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

c) $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$, pasi $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$. ♦

3. Njehso vlerën e shprehjeve:

a) $\log_2 \frac{1}{4}$; b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$; c) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}$.

a) Për shkak të $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ fitojmë se $\log_2 \frac{1}{4} = -2$;

Prova: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

b) Prej $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ vijon se $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$.

Prova: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$. ♦

c) Prej $3^{-2} = 3^{\frac{1}{7}}$ vijon se $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3} = -2$.

Prova: $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}} = \sqrt[7]{3}$. ♦

4. Cakto logaritmandin, nëse baza është $\frac{1}{2}$ dhe logarimti 4.

Prej $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ vijon se $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$. Domethënë logaritmandi është $\frac{1}{16}$. ♦

5. Cakto bazën *a* nëse $\log_a \frac{1}{8} = 3$.

Prej përkufizimit për logaritëm kemi $x^3 = \frac{1}{8}$, përkatësisht $x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ Domethënë $x = \frac{1}{2}$. ♦

Detyra për punë të pavarur

1. Tërhiq vizë në fletore tabelës dhe plotësoje:

Koncepte	log6 216 = 3	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a(b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
Logaritëm					
Baza e logaritmit					
Logaritmi					

2. Cakto vlerën e logaritmeve:

a) $\log_3 \frac{1}{9}$; b) $\log_{0,1} 0{,}01$; c) $\log_3 \sqrt{3}$; ç) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$.

3. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për logaritëm, cakto x nëse:

a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$; b) log x 36 = 2; c) logi $x = 0$; ç) $\log_x 125 = 5$.

4. Cakto vlerën e shprehjeve:

a) $5^{\log_5 2}$ b) $5^{2\log_5 3}$.

5. Njehso vlerën e shprehjeve:

a) $\log_2 8 - \log_3 9$; b) $4\log_{\sqrt{3}} 27 + 3\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

6*. Për cilat vlera të x shprehja $\log_{0,2}(x^2 - x)$ ka kuptim?

3 . 4. Rregullat për logaritmizim

Le të jetë $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ dhe $y > 0$.

I. Rregulla për logaritmizim prej prodhimit

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Vërtetimi. Nëse $a = \log_a x$ dhe $\beta = \log_a y$, atëherë $a^a = x$ dhe $a^\beta = y$. Prej $x > 0$, $y > 0$ vijon se $xy > 0$, prandaj ekziston $\log_a xy$. Atëherë kemi se $a^{\log_a xy} = xy = a^a \cdot\cdot\, a^\beta = a^{a+\beta} = a^{\log_a X + \log_a y}$, prej ku vijon se $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

I. $\log_2 6 = \log_2 2 \cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$. ◆

Rregulla për logaritëm prej prodhimi vlen edhe në rastin e shumëzuesëve të funshëm, përkatësisht për $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$, vlen

$$\boxed{\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}$$

II. Rregulla për logaritmin nga shkalla

$$\boxed{\log_a x^s = s\log_a x}$$

Vërtetimi. Le të jetë $a = \log_a x$. Prej $x > 0$ vijon se $x^s > 0$. Atëherë ekziston $\log_a x^s$. Për shkak të $a^{\log_a x^s} = x^s = \left(a^{\log_a x}\right)^s = a^{s\log_a x}$ Fitojmë se $\log_a x^s = s\log_a x$. ■

2. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4.$ ◆

III. Rregulla për logaritëm të herësit

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Vërtetimi. Duke ditur se $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, prej rregullës për logaritzmizim prej prodhimit dhe logaritmi i fuqisë kemi $\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y.$ ■

3. $\log_7 0{,}7 = \log_7 \frac{7}{10} = \log_7 7 - \log_7 10 = 1 - \log_7 10.$ ◆

Si pasojë e rregullës për logaritëm me fuqi për $m,n \in \mathbb{N}$, kemi:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log_a x.}$$

4. $\log_2 \sqrt[7]{32} = \log_2 \sqrt[7]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}\log_2 2 = \frac{5}{7}.$ ◆

Bashkësia e logaritmeve prej të gjitha numrave pozitiv, të njehsuar sipas bazës së njëjtë, quhet **sistem logaritmik**. Logaritmet të njehsuar me bazë 10 quhen **Logaritme dekade.** Logaritmet dekade i shkruajmë me log x, ku baza 10 nuk shkruhet. Shpeshherë shfrytëzohet edhe shenja lg x, përkatësisht $\log_{10} x = \log x = \lg x$. Logaritmet të njehsuara me bazë e, ku $e \approx 2{,}71$ quhen **logaritme natyrore.** Logaritmet natyrore i shkruajmë me ln x, përkatësisht $\log_e x = \ln x$. Rregullat për logaritmizim vlejnë edhe për logaritmet natyrore.

5. a) $\lg 10 = 1 \quad \lg 100 = \lg 10^2 = 2\lg 10 = 2 \quad \lg 10000 = \lg 10^4 = 4\lg 10 = 4$

b) $\ln e = 1 \quad \ln e^2 = 2\ln e = 2 \quad \ln e^4 = 4\ln e = 4$

c) $\lg 0{,}1 = \lg \frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1 \quad \lg 0{,}001 = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3$

ç) $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1 \quad \ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3.$ ◆

Prej detyrës së fundit m,und të përfundohet se logaritmi prej njësive dekade më të mëdhenj se 1 është numër i plotë pozitiv dhe ka po aq njëshe sa ka zero njësia dekade,kurse logaritmi prej njësive dekade më të vogla se 1 është numër i plotë negativ i cili ka po aq njëshe sa ka zero njësia dekade.

Le të jetë x numër real pozitiv për të cilin lg x është numër racional, përkatësish lg $x = k$, $k \in$ Q. Atëherë $x = 10^k$. Prandaj, logaritmi dekad prej numrit pozitiv i cili nuk është i formës 10^k, $k \in Q$ është numër iracional. Shënimi i tij dekad ka pafund shumë dhjetore, pra tregohet marrëveshje praktike për rrumbullakimin e numrit në 5 dhjetore.

Nëse A është çfarëdo numër real pozitiv, atëherë ekziston $n \in$N, ashtu që $10^{n-1} < A < 10^n$, prej ku vijon se $\lg 10^{n-1} < \lg A < \lg 10^n$. Sipas përkufizimit për logaritëm dekad kemi $n - 1 < \lg A < n$. Prej jobarazimit të fundit vijon jobarazimi: $0 < \lg A - (n - 1) < n$. Prandaj

$$\boxed{\lg A = (n-1) + \alpha}\text{, ku } n \in \mathrm{N} \text{ dhe } 0 \le \alpha < 1.$$

Numri n quhet **karakteristika,** kurse α quhet **mantisa** e logaritmit prej numrit A. Me fjalë të tjera, pjesa e plotë e logaritmit quhet karaklteristika, kurse pjesa dhjetore quhet mantisa e logaritmit. Prandaj, karakteristika mund të jetë pozitive, numër negativ i plotë ose zero, ndërsa mantisa është numër ndërmjet 0 dhe 1.

6. Cakto karakteristikën e lg 495,27.

Për shkak të $100 < 495{,}27 < 1000$ fitojmë se $\lg 100 < \lg 495{,}27 < \lg 1000$, përkatësisht $2 < \lg 495{,}27 < 3$. Prandaj, $\lg 495{,}27 = 2 + \alpha$, ku $0 < \alpha < 1$. Karakteristika e lg495,27 është 2. ◆

7. Cakto karakteristikën e lg 0,037.

Prej $0{,}01 < 0{,}037 < 0{,}1$, kemi $\lg 0{,}01 < \lg 0{,}037 < \lg 0{,}1$ ose $-2 < \log A < -1$. Prandaj, $\lg 0{,}037 = -2 + \alpha$, ku $0 < \alpha < 1$. Karakteristika e lg 0,037 është - 2. ◆

Prej detyrave 6 dhe 7 mund të përfundohet se karakteristika e numrave më të mëdhenj se 1 është për një më i vogël se numri i shifrave të pjesës së plotë prej shënimit të tij, kurse karakteristika e numrava më të vegjël se 1 është numër negativ i cili ka aq njëshe sa që ka zero majtas prej shifrës së parë të ndryshme nga zero.

8. Me ndihmën e kalkulatorit mund të njehsojmë, për shembull, se

$\lg 24{,}257 = 1{,}38484$
$\lg 1278{,}13 = 3{,}10658$
$\lg 0{,}00257 = -2{,}59007$. ◆

9. Cakto logaritmin dekad prej shprehjes $\dfrac{a^2b}{c^4}$, nëse lg $a = m$, lg $b = n$, lg $c = p$.

$$\lg \frac{a^2b}{c^4} = \lg a^2b - \lg c^4 = \lg a^2 + \lg b - \lg c^4 = 2\lg a + \lg b - 4\lg c = 2m + n - 4p. \ ◆$$

Detyra për punë të pavarur

1. Logaritmizoji shprehjet:

a) $x = 3ab$; b) $x = a^2bc^5$, c) $x = \frac{ab}{2c}$;

ç) $x = 2(a-b)$; d) $x = \frac{\sqrt{a}}{b^2 - c^2}$; e) $x = \sqrt{a\sqrt[3]{b^2}}$.

2. Thjeshtoi shprehjet:

a) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \log_3 4)$; b) $\log_3 64 \log_2 \frac{1}{27}$; c) $\log_2 \log 100$.

3. Cakto x, nëse dihet logaritmi i tij:

a) $\lg x = \lg 5 - \lg 2 + \log 4$; b) $\lg x = 3\lg 2 - 2\lg 3$;

c) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 3 + \frac{2}{3}\lg 5 - \frac{1}{3}\lg 2$; ç) $\lg x = \frac{1}{4}(2\lg 2 - 4\lg 3 + 5\lg 4)$;

d) $\ln x = \ln 5 - \ln 3 + \ln 1$; e) $\ln x = 3\ln 2 - 3\ln 3$;

f) $\ln x = \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 2$; g) $\ln x = \frac{1}{4}(2\ln 2 + 4\ln 3 + 5\ln 4)$.

4. Nëse marrim se $\lg 2 \approx 0{,}30$ dhe $\log 3 \approx 0{,}48$, cakto vlerën e përafërt të:

a) $\lg 4,\ \lg 6,\ \lg 8,\ \lg 9$; b) $\lg 12,\ \lg 16,\ \lg 18$.

5. Shkruaje karakteristikën e logaritmeve:

a) $\lg(0{,}7545 \cdot 0{,}0256 \cdot 0{,}65^2)$; b) $\lg\frac{28{,}5 \cdot 3{,}507}{0{,}457 \cdot 0{,}0293}$;

c)* $\lg\sqrt[5]{\frac{129}{9775}}$; ç)* $\lg(0{,}85 \cdot \sqrt[3]{0{,}55})$.

3. 5. Lidhja ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme

Le të jetë $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x > 0$.

Rregulla për ndërrimin e bazës së logaritmit

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}.$$

Vërtetimi. Nëse i logaritmojmë të dy anët e barazimit $x = a^{\log_a x}$ me logaritëm me bazë b kemi se $\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \bullet \log_b a$, përkatësisht $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. ■

1. $\log_3 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 7 \cdot \dfrac{\log_3 6}{\log_3 7} \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \dfrac{\log_3 9}{\log_3 6} =$

$= \log_3 9 = 2.$ ♦

Pasoja 1. Nëse $\boldsymbol{x = b} \neq 1$, atëherë $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$.

Vërtetimi. Kemi $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$. ■

2. $\log_{32} 2 = \dfrac{1}{\log_2 32} = \dfrac{1}{5}$. ♦

Pasoja 2. Nëse $\boldsymbol{s} \neq 0$, $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a} \neq 1$, $\boldsymbol{b} > 0$, atëherë $\boxed{\log_{a^s} b = \dfrac{1}{s}\log_a b}$.

Vërtetimi. $\log_{a^s} b = \dfrac{1}{\log_b a^s} = \dfrac{1}{s \log_b a} = \dfrac{1}{s}\log_a b$. ■

3. $\log_{2^3} 4 = \dfrac{1}{3}\log_2 4 = \dfrac{1}{3} \cdot 2 = \dfrac{2}{3}$. ♦

Pasoja 3. Nëse s ≠ 0, a > 0, a ≠1, b > 0, atëherë $\boxed{\log_{a^s} b^s = \log_a b}$.

Vërtetimi. Kemi $\log_{a^s} b^s = s\log_{a^s} b = s \cdot \dfrac{1}{s}\log_a b = \log_a b$. ■

4. a) $\log_4 2^2 = \log_{2^2} 2^2 = \log_2 2 = 1$; b) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{3}}} 9^{\frac{1}{3}} = \log_3 9 = 2$. ♦

6. Nëse marrim se lg 2 ≈ 0,30 dhe lg 3 ≈ 0,48, mund të njehsojmë:

$$\log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5} = \frac{\lg(2 \cdot 3)}{\lg \frac{10}{2}} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 10 - \lg 2} \approx \frac{0{,}30 + 0{,}48}{1 - 0{,}30} = \frac{0{,}78}{0{,}70} = \frac{39}{35}. \ ♦$$

Detyra për punë të pavarur

1. Shprehe lidhjen ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme.

2. Vërtetoi barazimet:

a) $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$;

b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \dfrac{1}{3}$.

3. Njehso vlerën e shprehjes $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125$.

4. Thjeshtoi shprehjet:

a) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$; b) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$; c) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}$.

5*. Vërteto se nëse $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$, atëherë $\log_b a = -\log_{\frac{1}{b}} a$.

3. 6. Barazimet logaritmike

Përkufizimi 1. Barazimet te të cilat e panjohura gjendet te logaritmandi quhet **baraziome logaritmike.**

1. Barazimet logaritmike janë, për shembull, barazimet:

$\log_2(x + 4) = 7$, $\log_{2x}(5 + x^2) = 9$, $\log_5(3x - 2) = \log_5 x$. ◆

Le të jetë $a > 0$, $a \neq 1$.

I. Zgjidhja e barazimeve logaritmike të llojit $\log_a f(x)=b$

Prej përkufizimit vijon ekuivalenca e barazimeve:

$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x)$.

2. Zgjidhi barazimet:

a) $\log_3(x+5)=3$	b) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-7x+13)=0$	c) $\log_5(x^2-9)^2=2$
$x+5=3^3$	$x^2-7x+13=(\sqrt{3})^0$	$(x^2-9)^2=5^2$
$x+5=27$	$x^2-x+12=0$	$x^4-18x^2+56=0$
$x=22$	$x_1=-3$ dhe $x_2=4$	$x_{1,2}=\pm 2,\ \ x_{3,4}=\pm\sqrt{14}$

Nëse për zgjidhjen e barazimit logaritmik nën c) e shfrytëzojmë për logaritë prej fuqisë kemi:

$$\log_5(x^2-9)^2=2 \Leftrightarrow 2\cdot\log_5(x^2-9)=2 \Leftrightarrow \log_5(x^2-9)=1 \Leftrightarrow x^2-9=5 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{14}. ◆$$

Kemi vetëm dy zgjidhje të barazimit, pasi jo drejt e shfrytëzuam rregullën për logaritëm prej fuqisë, përkatësisht barazimi $\log_a b^2 = 2\log_a b$, që është e saktë vetëm për b > 0. Përdorimi i rregullës prej fuqisë do të jetë drejtë e shkruar nëse shkruajmë:

$$\log_5(x^2-9)^2=2 \Leftrightarrow 2\log_5|x^2-9|=2 \Leftrightarrow \log_5|x^2-9|=1 \Leftrightarrow |x^2-9|=5.$$

II. Zgjidhja e barazimeve logaritmike të llojit $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Zgjidhjet e barazimit $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ fitohen me zgjidhjen e barazimit $f(x) = g(x)$. Çdo zgjidhje e barazimit $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ është zgjidhje e barazimit $f(x) = g(x)$. E anasjelltas në rastin e përgjithshëm nuk vlen, prandaj për zgjidhjet e fituara të barazimit $f(x) = g(x)$ do të bëjmë provën te barazimi $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

3. Zgjidhi barazimet:

a) $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$

$x^2 - 7x + 11 = x - 4$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x_1 = 3,\ x_2 = 5$

Prova: $x = 3$

$\log_3(3^2 - 7 \cdot 3 + 11) = \log_3(3 - 4)$

$\log_3(-1) = \log_3(-1)$, nuk ekziston

$x = 3$ nuk është zgjidhje

Prova: $x = 5$

$\log_3(5^2 - 7 \cdot 5 + 11) = \log_3(5 - 4)$

$\log_3 1 = \log_3 1$

Zgjidhje e barazimit kogaritmik të dhënë është x=5.

b) $\lg(3x - 2 - 2x^2) = \lg(x^2 - 10x - 12)$

$3x - 2 - 2x^2 = x^2 - 10x - 12$

$3x^2 - 13x - 10 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = -\frac{2}{3}$

Prova: $x = 5$

$\lg(3 \cdot 5 - 2 - 2 \cdot 5^2) = \lg(5^2 - 10 \cdot 5 - 12)$

$\lg(-37) = \lg(-37)$, nuk ekziston

$x = 5$ nuk është zgjidhje

Prova: $x = -\frac{2}{3}$

$$\lg\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 2 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\} = \lg\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 10\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 12\right\}$$

$\lg\left(-\frac{44}{9}\right) = \lg\left(-\frac{44}{9}\right)$, nuk ekziston

Barazimi logaritmik i dhënë nuk ka zgjidhje reale. ◆

III. Zgjidhja e barazimeve të cilat sillen në barazime të llojit $\log_a f(x) = b$ dhe $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

4. Zgjidhi barazimet:

a) $\log_3(x - 3) + \log_3(2x + 1) = 2$ b) $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x - 3)$

c) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$.

a) $\log_3(x - 3) + \log_3(2x + 1) = 2$

$\log_3(x - 3) \cdot (2x + 1) = 2$

$2x^2 - 5x - 12 = 0$

Prova: me zëvendësimin për x=4, por pastaj për $x = -\frac{3}{2}$, fitojmë se barazimi ka vetëm një zgjidhje x=4.

$x_1 = 4, x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x-3)$

$\log_5(x^2 - 6x + 7) - \log_5(x-3) = 0$

$\log_5 \frac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 0$

$\frac{x^2 - 6x + 7}{x-3} = 1, x \neq 3$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = 2$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

kur $> 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$

Prova: me zëvëndësimin për x=5, por pastaj për x=2, përfundojmë se barazimi ka vetëm një zgjidhje x=5.

c) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$

Me zëvendësimin $\sqrt{\lg 2x} = t$, kemi

$4 - t^2 = 3t$

$t^2 + 3t - 4 = 0$

$t_1 = 1, t_2 = -4$

$\sqrt{\lg 2x} = 1$

$x = 5.$

Prova: Pasi barazimi $\sqrt{\lg 2x} = -4$ nuk ka zgjidhje me zëvëndësimin për $x = 5$ përfundojmë se barazimi ka vetëm një zgjidhje x=5.

5. Zgjidhi barazimet:

a) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7,$

$\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7,$

$\frac{7}{4}\log_2 x = 7,$

$\log_2 x = 4,$

$x = 2$

Prova: $\log_{16} 2 + \log_4 2 + \log_2 2 = 7$

Zgjidhja e barazimit është $x = 2.$

b) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1.$

$\log_{3^2} x + \frac{1}{\log_3 x^2} = 1$

$\frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2\log_3 x} = 1$

$\log_3^2 x - 2\log_3 x + 1 = 0$

$\log_3 x = t$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t = 1$

$\log_3 x = 1$

$x = 3.$

Prova: $\log_9 3 + \log_9 3 = 1$

$2\log_9 3 = 1,\ \log_9 9 = 1$

Zgjidhja e barazimit është $x = 3.$

c) $\lg 5 + \lg(x+10) - 1 = \lg(21x - 20) - \lg(2x-1).$

$\lg 5 + \lg(x+10) - \lg 10 = \lg(21x - 20) - \lg(2x-1)$

$$\lg\frac{5(x+10)}{10}=\lg\frac{21x-20}{2x-1}$$

$$\frac{5(x+10)}{10}=\frac{21x-20}{2x-1}$$

$$5(x+10)(2x-1)=10(21x-20)$$

$$10x^2+95x-50=210x-200$$

$$x_1=10,\quad x_2=\frac{3}{2}.\ \blacklozenge$$

Prova:

$$\lg 5+\lg 20-1=\lg 190-\lg 19$$

$$\lg 100-\lg 10=\lg 10$$

$$\lg 10^2=2\lg 10$$

$$2\lg 10=2\log 10$$

Zgjidhje e barazimit është $x=10$.

Provo $x_2=\frac{3}{2}$ za është zgjidhje e barazimit?

Detyra për punë të pavarur

Zgjidhi barazimet

1. $\log_{\sqrt{3}}(2x^2-6)=2.$

2. $\log_3(x^2-5x+7)=1.$

3. $\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$

4. $\lg(3x-1)+\lg(12-x)=2.$

5. $\log_x 2-\log_x 3=4.$

6. $\log_2 x-\log_{16} x=3.$

7*. $\log_3(1+\log_3(2x-7))=1.$

3. 7. Detyra për ushtrime

1. Për cilat vlera të numrave real x dhe y, vlen:

a) $8^x=8^y$; b) $\sqrt{3}^x>\sqrt{3}^y$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$?

2. Çka është më e madhe $a^{\frac{2}{3}}$ ose $a^{\frac{3}{4}}$ nëse:

a) $a>1$; b) $0<a<1$?

Zgjidhi barazimet:

5. $16^{x-0,5}=32^{14-x}.$ **6.** $2\cdot 5^x=50.$ **7.** $4^x-6\cdot 2^x=-8.$

8. $\left(9^{x-1}\right)^{x-1}=9^{x-4}\cdot 3^{2x+4}.$ **9.** $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\frac{125}{64}=0.$ **10*.** $4^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{x}}=12.$

11. Duke shfrytëzuar përkufizimin për logaritëm, cakto numrin x, nëse:

a) $\log_x 16 = 2$; b) $\log_x 27 = -\frac{3}{4}$; c) $\log_x 1000 = -3$;

ç) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; d) $\log_{100} x = 0{,}2$; e) $\log_{\frac{1}{3}} x = 8$.

12. Logaritmoi këto shprehje:

a) $2xy$; b) $3x^2y^2$; c) $x^2y^5\sqrt{z}$; ç) $a^{\sqrt{b}}c^3$;

d) $6x\sqrt[3]{y^2}$; e) $\sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y}}}$; f)* $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{y}}}$.

13. Cakto numrin x nëse dihet logaritmi i tij.

a) $\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 2$; b) $\lg x = \lg 5 + \frac{1}{2}(\lg 8 - \lg 2)$;

c) $\log x = \log 7 + \log 9 - \log 3$; ç) $\log x = 2\log 3 + 3\log 5$.

14. Me zbatimin e logaritmit, njehso vlerën e shprehjeve:

a) $x = \frac{333{,}648 \cdot 2{,}49}{125{,}36}$; b) $x = \frac{43{,}5 \cdot 0{,}26^2}{6{,}38^3 \cdot 1{,}28}$; c) $x = 3{,}25^3 \cdot \sqrt[5]{54{,}21}$.

15. Ndërroje bazën e:

a) $\log_2 5$ me 4; b) $\log_3 7$ me $\sqrt{7}$; c) lg5 me $10^{-1.}$

16*. Thjeshtoi shprehjet, duke shfrytëzuar lidhjet ndërmjet logaritmeve me baza të ndryshme.

a) $\dfrac{\log_{3^2} 25 + \log_3 7}{\log_3 \frac{5^2 \cdot 7^2}{3^2} + 2}$; b) $\log_2 \sqrt{x}(x+1) - \log_2 (x+1)^2 + \log_4 (x+1)$.

17. Njehso vlerën e shprehjeve:

a) $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125$;

b) $\log_3 2 + \log_7 245 + \log_{12} 7 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{7}} 5 + \log_{\frac{1}{12}} 84$.

Zgjidhi barazimet:

18. $\lg x + \lg(x-3) = 1$.

19. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$.

20. $7\log_{25} x - \log_5 x = 5$.

21. $\log_{x-1} 3 = 2$.

22. $\log_5 (x-3) = \log_5 (x^2 - 5x - 10)$.

23*. $\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$.

Pasqyra tematike

Për çdo numër real x dhe çdo numër real pozitiv a është përcaktuar fuqi me tregues pozitiv a^x në këtë mënyrë.

I. Nëse $x > 0$ dhe

1. $x = n$, atëherë $a^x = \begin{cases} a & \text{për } n=1 \\ \underbrace{aa...a}_{n} & \text{për } n>1 \end{cases}$

2. $x = \frac{1}{n}$, atëherë $a^x = \sqrt[n]{a}$

3. $x = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, atëherë $a^x = \sqrt[n]{a^k}$

4. $x = c_0, c_1c_2...c_n...$, atëherë

a) për $a > 1$, kemi $a^{c_0,c_1c_2...c_n} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}$

b) për $0 < a < 1$, kemi $a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...c_n}$

c) për $a = 1$, kemi $a^x = 1$

II. Nëse $x = 0$ atëherë $a^x = 1$

III. Nëse $x < 0$ atëherë $a^x = \frac{1}{a^{|x|}}$

Për fuqinë e numrit real pozitiv a me tregues real vlejnë këto veti:

1. $a^x = b^x$, për çdo $x \in \mathbb{R}$ nëse dhe vetëm nëse $a = b$

2. Për çdo $x \in \mathbb{R}$ ekziston fuqi e vetme a^x

3. $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$ për çdo $x, y \in \mathbb{R}$

4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ për çdo $x, y \in \mathbb{R}$

5. $(ab)^x = a^x b^x$ për çdo $x \in \mathbb{R}$

Barazime te të cilat e panjohura gjendet te treguesi i fuqisë quhet **barazime eksponenciale.**

Janë përpunuar këto lloje të barazimeve eksponenciale:

I. Barazime të llojit $A^x + m = 0$, $A > 0$, $A \neq 1$, $m < 0$

II. Barazime të llojit $A^{f(x)} + m = 0$, $A > 0$, $A \neq 1$, $m < 0$

III. Barazime të llojit $a(A^{f(x)})^2 + bA^{f(x)} + c = 0$

Le të jetë $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ dhe $b \in R^+$. Numri real x i atillë që $a^x = b$ quhet **logaritëm** prej b me bazë a. Shkruajmë $x = \log_a b$.

Prandaj, për $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$,

$$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$$

Drejtpërdrejt prej përkufizimit vijon se

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Numri x quhet **logaritëm,** numri a quhet **baza e logaritmit,** kurse numri b quhet **logaritmand.**

Le të jetë $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ dhe $y > 0$.

I. Rregulla për logaritëm prej prodhimi

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Rregulla për logaritëm prej prodhimi vlen edhe në rastin e shumëzuesve të fundshëm, përkatësisht për $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$, vlen

$$\boxed{\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}$$

II. Rregulla për logaritmizim prej fuqisë

$$\boxed{\log_a x^s = s \log_a x}$$

III. Rregulla për logaritmizim të herësit

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Si pasojë e rregullave për logaritmizim me fuqi për $m,n \in \mathbb{N}$, kemi:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a x.}$$

Bashkësia e logaritmeve prej të gjitha numrave pozitiv, të njehsuar sipas bazës së njëjtë, quhet **sistem logaritmik**. Logaritmet të njehsuar me bazë 10 quhen **Logaritme dekade.** Logaritmet dekade i shkruajmë me log x, ku baza 10 nuk shkruhet. Shpeshherë shfrytëzohet edhe shenja lg x, përkatësisht $\log_{10} x = \log x = \lg x$. Logaritmet të njehsuara me bazë e, ku $e \approx 2{,}71$ quhen **logaritme natyrore.** Logaritmet natyrore i shkruajmë me ln x, përkatësisht $\log_e x = \ln x$. Rregullat për logaritmizim vlejnë edhe për logaritmet natyrore $\log_e x = \ln x$.

Rregullat për logaritmizim vlejnë edhe për logaritmet dekade dhe natyrore.

Nëse A është cilido numër real pozitiv, atëherë ekziston $n \in \mathbb{N}$, ashtu që $\boxed{\lg A = (n-1) + \alpha}$, ku $n \in \mathbb{N}$ dhe $0 < \alpha < 1$.

Numri n quhet **karakteristika,** kurse α quhet **mantisa** e logaritmandit prej numrit A.

Le të jetë $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x > 0$.

Rregulla për shndërrimin e bazës së logaritmit

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Nëse $x = b \neq 1$, atëherë $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$.

Nëse $\boldsymbol{s} \neq 0$, $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a} \neq 1$, $\boldsymbol{b} > 0$, atëherë $\boxed{\log_{a^s} b = \dfrac{1}{s}\log_a b}$.

Nëse $s \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, atëherë $\boxed{\log_{a^s} b^s = \log_a b}$.

Barazime te të cilat e panjohura gjendet edhe te logaritmandi quhen **barazime logaritmike.**

Le të jetë $a > 0$, $a \neq 1$. Të përpunuara janë këto lloje të barazimeve logaritmike:

I. Barazime të llojit $\log_a f(x) = b$

II. Barazime të llojit $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

III. Barazime të llojit të cilat sillen në barazime të llojit
$\log_a f(x) = b$ dhe $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

4 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NGUSHTË

4. 1. Funksione trigonometrike prej këndit të ngushtë.

Matja e këndeve

Të përkujtohemi, unioni i dy gjysmëdrejtëzave me fillim të përbashkët dhe njëra prej pjesëve te të cilat ato dy gjysmëdrejtëza e ndajnë rrafshin quhet **kënd**. Në këtë kuptim, dy gjysmëdrejtëza *OA* dhe *OB* me fillim të përbashkët përcaktojnë dy kënde, të cilët i shënojmë me $\angle AOB$ (ose $\angle BOA$) ose me shkronja greke α, β, γ **.** Gjysmëdrejtëza *OA* dhe *OB* quhen **krahë** të këndit *AOB,* kurse pika O **kulmi** i tij**.**

Ekzistojnë mënyra të ndryshme për të shprehur madhësinë e këndeve. Deri më tani, si njësi të matjes për matjen e këndeve e shfrytëzuam **shkallën. Një shkallë (1°)** është njësia e matjes për matjen e këndeve të përkufizuar si $\frac{1}{360}$ pjesë e këndit të plotë. Njësi më të vogla se një shkallë dhe pjesë prej një njësie të matjes është **një minutë (1')** e cila përkufizohet $\frac{1}{60}$ si pjesë e një shkalle dhe **një sekondë (1")** të përkufizuar si $\frac{1}{60}$ pjesë e një minute, përkatësisht, $\frac{1}{3600}$ pjesë e shkallës. Duke i shfrytëzuar këto raporte mundmi të shndërrojmë shkallë, minuta, sekonda në formë dhjetore të shkallëve.

1. Shndërroje këndin prej $14^0\ 36'\ 54''$ në formë dhjetore.

$$14^0\,36'\,54'' = 14^0 + \left(\frac{36}{60}\right)^0 + \left(\frac{54}{3600}\right)^0 = 14^0 + 0{,}6^0 + 0{,}015^0 = 14{,}615^0. \ \blacklozenge$$

2. Shndërroje këndin $72{,}568^0$ në shkallë, minuta dhe sekonda.

$$72{,}568^0 = 72^0 + (0{,}56\cdot 60)' = 72^0 + 33{,}9' = 72^0 + 33' + (0{,}9\cdot 60)'' = 72^0 + 33' + 54'' = 72^0\,33'\,54''.$$

Në vazhdim do të fusim një njësi të re për matje të këndeve. Pikërisht, madhësia e këndit qendror te vija rrethore harku rrethor i të cilës e ka gjatësinë të barabartë me rrezen e asaj vije rrethore, quhet **një radian** dhe shënohet me **1 rad** (fig. 1).

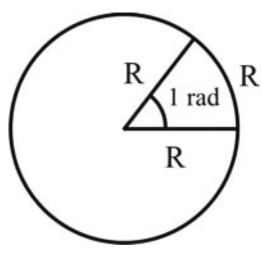


Fig. 1

Ta konstatojmë lidhjen ndërmjet dy njësive për matjen e këndeve, shkallë dhe radian.

Pasi gjatë vijës rrethore me rreze *R* është ***2R*π,** këndi i plotë, që është Këndi qendror i tërë vijës rrethore, e ka madhësinë 2π *rad*. Nga ana tjetër, Këndi i plotë e ka madhësinë 3600 prandaj 3600 = $2\pi rad$.

Prej të fundit vijon se

$$1rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}29578^0 \approx 57^0\,17'\,45''\text{dhe } 1^0 = \frac{\pi}{180}rad \approx 0{,}01745rad.$$

3. a) Shprehi në radian këndin 100°11'5''.

$$100^0 11^{'} 15^{''} = 100\cdot\frac{\pi}{180} + 11\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{\pi}{180} + 15\cdot\frac{1}{3600}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 1{,}7\,rad$$

b) Shprehi në shkallë këndin $\frac{5\pi}{12}$.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}\cdot\frac{180^0}{\pi} = 75^0 .\ \blacklozenge$$

- Shumëzoi shkallët me $\frac{\pi}{180}$, për të shndërruar në radian.
- Shumëzoi radianët me $\frac{180}{\pi}$, që t'i shndërrojsh në shkallë

Sinusi, kosinusi, tangensi dhe kotangensi i këndit të ngushtë

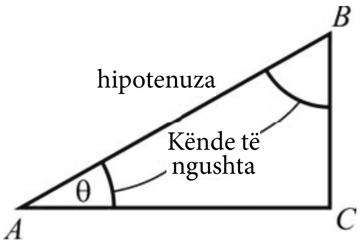


Fig. 2

Do të zbatojmë përkufizimin e katër funksioneve trigonometrike prej këndit të ngushtë, me ndihmën e trekëndëshit kënddrejtë.

Te trekëndëshi ABC (fig. 2) këndi pranë kulmit C është kënd i drejtë, kurse të dy këndet pranë kulmeve A dhe B janë kënde të ngushtë.

Nëse e shënojmë me θ këndin e ngushtë pranë kulmit A atëherë brinja BC quhet kateta **e përballtë ,** kurse brinja te Fig. 2 AC katetë **e pranëshme** për këndin θ.

Ta shqyrtojmë trekëndëshin kënddrejtë ABC dhe segmentet B_1C_1, B_2C_2 dhe B_3C_3 të cilët janë normal në brinjën AC (fig. 3). Ato segmente janë katete të trekëndëshave kënddrejtë AB_XC_X, AB_2C_2 dhe AB_3C_3 të cilët kanë kënd të përbashkët α me trekëndëshin kënddrejtë ABC. Trekëndëshat kënddrejtë janë të ngjashëm, pra përkatësisht brinjët i kanë proporcionale, përkatësisht:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}};\ \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}};$$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \text{ dhe } \frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

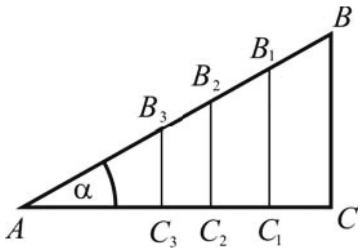


Fig. 3

Domethënë, për këndin e dhënë α, raportet ndërmjet gjatësive të brinjëve përkatëse prej fig. 3 janë konstante.

Por, nëse ndryshon madhësia e këndit α atëherë do të ndryshon edhe vlera e raporteve. Që të arrijmë deri ta ky përfundim, mjafton t'i shqyrtojmë trekëndëshat kënddrejtë AB_1C_1, AD_1C_1 dhe AE_1C_1 (fig. 4). Këto trekëndësha nuk janë të ngjashëm, prandaj raportet e brinjëve përkatëse nuk janë të barabarta, përkatësisht $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} \neq \frac{\overline{D_1C_1}}{\overline{A_1C_1}}$ e më tutje. Domethënë këndi α ndikon në ndryshimin e vlerës së raportit të gjatësive të brinjëve përkatëse. Kështu mundemi të përfundojmë se raporti prej gjatësisë së dy brinjëve të trekëndëshit kënddrejtë, varet prej madhësisë së këndit të ngushtë të atij trekëndëshi. Nëse është dhënë vlera e këndit, mund të caktohet vlera e raportit të brinjëve dhe anasjelltas, nëse është dhënë vlera e cilitdo prej raporteve paraprake, mundet të caktohet madhësia e këndit të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë dhe raportet e brinjëve të tij ekzistojnë funksione. Prandaj ato raporte kanë marrë emra të veçantë:

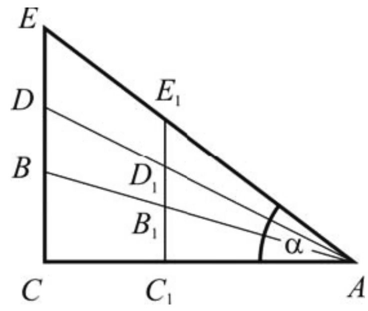


Fig. 4

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ quhet **sinus** i këndit dhe shënohet sinα**,** përkatësisht $\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ quhet **kosinus** i këndit dhe shënohet cosα, përkatësisht $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$;

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ quhet **tangensi** i këndit, dhe shënohet tgα, përkatësisht $tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ dhe

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ quhet **kotangensi** i këndit dhe shënohet ctgα, përkatësisht $ctg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Funksionet paraprakisht të përkufizuara të cilat e përshkruajnë varësinë ndërmjet gjatësive të brinjëve te trekëndëshi kënddrejtë dhe këndet e tij të ngushtë quhen **funksione trigonometrike.** Ato funksione shprehen edhe në këtë mënyrë:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{kateta përballë këndit } \alpha}{\text{hipotenuza}}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{kateta përbrij këndit } \alpha}{\text{hipotenuza}}$
$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{kateta përballë këndit } \alpha}{\text{kateta e pranëshme për } \alpha}$	$ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{kateta këndit } \alpha}{\text{kateta e përballë } \alpha}$

4. Caktoi funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë δ te drejtkëndëshi *ABCD* në fig. 5.

Prej trekëndëshit kënddrejtë ABC kemi se:

$\sin\delta = \frac{b}{d}$, $\cos\delta = \frac{a}{d}$, $tg\delta = \frac{b}{a}$, $ctg\delta = \frac{a}{b}$. ♦

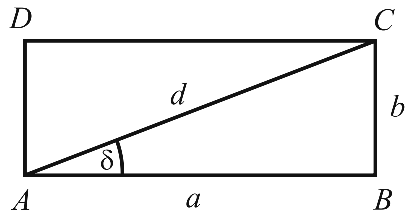


Fig. 5

5. Është dhënë trekëndëshi kënddrejtë katetet e të cilit janë 3*cm* dhe 4 *cm.* Cakto funksionet trigonometrike prej këndit të ngushtë (fig. 6).

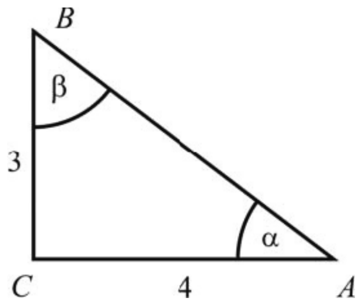


Fig. 6

Sipas teoremës së Pitagorës e gjemë hipotenuzën

$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, përkatësisht $c = 5$.

Atëherë

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \cos\alpha = \frac{4}{5} \quad tg\alpha = \frac{3}{4} \quad ctg\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{5} \quad \cos\beta = \frac{3}{5} \quad tg\beta = \frac{4}{3} \quad ctg\beta = \frac{3}{4}. \blacklozenge$$

Funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus përkufizohen edhe për këndin zero dhe këndin e drejtë me:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Gjithashtu përkufizohet $tg0 = 0$, $ctg\frac{\pi}{2} = 0$, ndërsa $tg\frac{\pi}{2}$ dhe $ctg0$ nuk përkufizohen.

Detyra për punë të pavarur

1. Nënvizo dhe plotëso tabelën.

Shkallë	0^0	30^0		60^0		180^0		360^0
Radian			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

Cakto funksionet trgonometrike të këndit β te trekëndëshi kënddrejtë nëse janë dhënë të dy katetet a dhe b.

2. $a = 5$, $b = 12$; **3.** $a = 3$, $b = 5{,}2$.

Cakto funksinet trigonometrike të këndit α te trekëndëshi kënddrejtë nëse janë dhënë kateta a dhe hipoteniza c:

4. $a = 8$, $c = 10$; **5.** $a = 9{,}8$, $c = 12{,}6$.

4. 2. Njehsimi i vlerave të funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi

Gjatë zgjidhjes së problemeve të ndryshme në gjeometri shfrytëzohen funksionet trigonometrike të këndeve 30°, 45° dhe 60°. Për njehsimin e funksioneve trigonometrike të këtyre këndeve do të shfrytëzojmë edhe vetitë e funksioneve trigonometrike prej këndeve komplementar.

Të përkujtohemi se dy kënde quhen kënde komplementare nëse shuma e tyre është kënd i drejtë. Të dy këndet e ngushtë te trekëndëshi kënddrejtë janë kënde komplementar. Pse? Nëse α është njëri prej këndeve të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë *ABC* (fig. 7), atëherë këndi $\beta = 90^0 - \alpha$ është këndi i tij komplementar. Nëse këndi α është dhënë në radian, atëherë $\frac{\pi}{2} - \alpha$ është këndi i tij komplementar. Më tutje, brinja *a* është përballë katetets

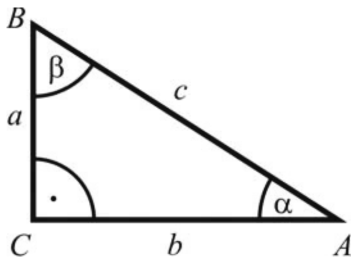


Fig. 7

për këndin α, kurse e përbri këndit β, ndërsa brinja *b* është kateta përbri këndit α, por përballë këndit β. Prandaj, për funksionet trigonometrike prej brinjëve a dhe b (ku $\alpha \neq 0^0$ dhe $\beta \neq 0^0$), kemi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad tg\alpha = \frac{a}{b} = ctg\beta, \quad ctg\alpha = \frac{b}{a} = tg\beta, \text{ përkatësisht}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha),\ \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha),\ tg\alpha = ctg(90 - \alpha),\ ctg\alpha = tg(90^0 - \alpha)}.$$

1. Për shembull, $\cos 70^0 = \sin(90^0 - 70^0) = \sin 20^0$; $\sin 10^0 = \cos(90^0 - 10^0) = \cos 80^0$;

$$tg\frac{\pi}{6} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = ctg\frac{\pi}{3}; \quad ctg\frac{\pi}{6} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{3}. \ \blacklozenge$$

Ta shqyrtojmë trekëndëshin barabrinjës *ABC* me brinjë të gjatë 2 njësi (fig. 8). Lartësia *AD* e lëshuar prej kulmit *A*, paraqet njëkohësisht Bisektrisë të këndit pranë kulmit *A*,si edhe simetrale e brinjës përballë me *BC*. Domethënë,

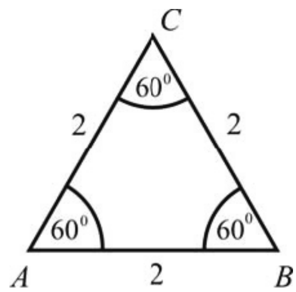


Fig. 8

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ dhe } \angle DAB = \frac{1}{2}(\angle CAB) = \frac{1}{2}(60^0) = 30^0.$$

Me zbatimin e teoremës së Pitagorës për trekëndëshin kënddrejtë *ABD* (fig. 9) kemi

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 \text{ ose } \overline{AD}^2 + 1^1 = 2^2.$$

Prandaj $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, përkatësisht $\overline{AD} = \sqrt{3}$.

Tani mund t'i njehsojmë funksionet trigonometrike të këndeve te trekëndëshit kënddrejtë *ABD:*

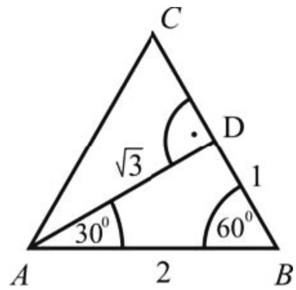


Fig. 9

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}; \qquad \sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^0 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg30^0 = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}; \qquad tg30^0 = ctg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$ctg30^0 = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}; \qquad ctg30^0 = tg60^0 = \sqrt{3}.$$

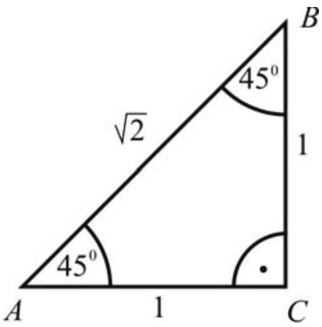


Fig. 10

Që t'i njehsojmë vlerat e funksioneve trigonometrike prej 45^0 konstruktojmë trekëndësh kënddrejtë barabrinjës me brinjë të gjatë 1 njësi (fig. 10). Këndet e tij të ngushta janë nga 45^0.

Sipas teoremës së Pitagorës për hipotenuzën se $|AB| = \sqrt{2}$. Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike vijon se:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 \text{ dhe } tg45^0 = \frac{1}{1} = 1 = ctg45^0.$$

Vlera e fituara për funksionet trigonometrike i paraqesim në tabelë:

Степени	Радијани	*sin*	*cos*	*tg*	*ctg*
0^0	0	0	1	0	/
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

2. Njehso vlerën e shprehjes $\cos45^0 \bullet \cos30^0 - \sin45^0 \bullet \sin30^0$.

$$\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \blacklozenge$$

3. Cakto vlerën numerike të shprehjes $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin\alpha}$ për $\alpha=30^0$.

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{\cos 2 \cdot 30^0}{1 + \sin 30^0} = \frac{\cos 60^0}{1 + \sin 30^0} = \frac{\cos 60^0}{1 + \cos 60^0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}. \blacklozenge$$

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso**:**

a) $\cos 57^0$ nëpërmjet $\sin 33^0$; b) $\sin 77{,}77^0$ nëpërmjet $\cos 12{,}23^0$;

c) $ctg\,\frac{5\pi}{18}$ nëpërmjet $tg\,\frac{2\pi}{9}$ d) $tg\left(\frac{\pi}{2}-1{,}087\right)$ nëpërmjet $ctg 1{,}0785$

2. Njehso këndin α nëse dihet se:

a) $\cos(\alpha + 10^0) = \sin 20^0$ b) $tg 35^0 = ctg\,(\alpha - 15^0)$.

3. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0$; b) $\dfrac{\sin 30^0 + 1}{1+\cos 60^0}$; c) $\dfrac{tg 30^0 + ctg 45^0}{ctg 60^0 + tg 45^0}$.

4. Njehso:

a) $2\cdot\cos 30^0\cdot\cos 45^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$; b) $\sin^2 30^0 + tg^2 60^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$.

5*. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $\dfrac{1+\sin 30^0}{1-\sin 30^0}$; b) $\dfrac{ctg 60^0 + tg 45^0}{1 - tg 60^0\cdot tg 45^0}$; c) $\dfrac{4\sin^2 45^0 + 1}{ctg^2 30^0}$.

6. Njehso vlerën e këndit α nëse:

a) $tg\alpha = 1$; b) $ctg\alpha = \sqrt{3}$;

c) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; e) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 3. Njehsimi i vlerave të funksioneve trigonometrike me kalkulator

Vërejtëm se për këndet $0^0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ dhe $\frac{\pi}{2}$ lehtë është të gjenden vlerat e sakta për funksionet trigomnometrike. Në rastin kur ajo nuk është e mundur vlera e tyre të përafërta i gjejmë me tabela ose me kalkulator.

Kalkulatorët më së shpeshti kanë buton të veçantë për konversion të shkallëve, minutave dhe sekondave te fuqitë dhjetore. Ky buton më së shpeshti është shënuar me (° ‘ “) ose (DMS) (sipas degrees - minutes - seconds).

Nëse dëshirojmë të shndërrojmë këndin $32^0\ 45'\ 10''$ në shkallë veprojmë në këtë mënyrë: shkruajmë 32, pastaj e shtypim butonin; fusim 45, e shtypim butonin; fusim 10 dhe për herë të tretë e shtypim butonin. Rezultati i fituar është 32,7527778°.

Nëse dëshirojmë të shndërrojmë këndin e dhënë në shkallë dhjetore të shkallës, minuta dhe sekonda, atëherë e shfrytëzojmë edhe butonin të shënuar më së shpeshti me ngjyrë të verdhë në të cilën shkruan $\boxed{2^{ndf}}$ ose $\boxed{\text{inv}}$, me të cilën bëhet inversioni i operacionit përkatës. Pastaj futja e numrit dhjetor, së pari e shtypim butonin për inversion, por pastaj butonin $\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}$.

Gjithashtu, kalkulatorët më së shpeshti kanë dy situata, njëra te e cila punohet me kënde në shkallë dhjetore, të shënuara me *deg*, kurse tjetra te e cila punohet me kënde në radiane, të shënuar me *rad*. Ndërrimi prej njërës pozitë në tjetrën është duke shtypur te butoni përkatës.

Me ndihmën e kalkulatorëve gjenden funksionet trigonometrike prej këndeve të dhënë, por edhe anasjelltas, për funksionin e dhënë trigonometrik gjendet këndi përkatës. Këto mënyra do t'i shqyrtojmë në këto shembuj.

1. Llogarit me ndihmën e kalkulatorit:

a) $\sin 41{,}3^0$; b) $\cos 19^0 21' 17''$; c) $tg\,\frac{5\pi}{36}$.

a) Në fillim e vëndojmë kalkulatorin në pozitë për njehsimin e këndeve në shkallë dhjetore dhe futet vlera e $41{,}3^0$. Pastaj e shtypim butonin të shënuar me $\boxed{sin}$, me të cilën fitohet vlera e kërkuar $\sin 41{,}3^0$.

$41{,}3^0 \longrightarrow \boxed{sin} = 0{,}660017.$

b) Në fillim është e nevojshme këndi $19^0\,21'\,17''$ të shndërrohet në formë dhjetore, por pastaj vijon mënyra si nën a).

$$19^0\,21'17'' = 19^0 + \left(\frac{21}{60}\right)^0 + \left(\frac{17}{3600}\right)^0 = 19{,}354722^0;$$

$19{,}354722^0 \longrightarrow \boxed{cos} = 0{,}943484853.$

c) Në këtë rast e vendojmë kalkulatorin në pozitë për njehsimin e këndeve në radian. Pastaj e shtypim butonin $\boxed{\pi}$ me të cilën futet vlera 3,141592654), shumëzojmë me 5, pjesëtojmë me 36 dhe në fund e shtypim butonin tangens ($\boxed{tan}$) me të cilën e fitojmë rezultatin e kërkuar:

$tg\,\frac{5\pi}{36} = 0{,}466307658.$ ♦

2. Me ndihmën e kalkulatorit cakto këndin α nëse:

a) $\sin\alpha = 0{,}74281$; b) $\cos\alpha = 0{,}23849$; c) $tg\alpha = 3{,}8611$.

a) Kalkulatori le të jetë në pozitën *deg*. Futet vlera e $\sin\alpha = 0{,}74281$, shtypet butoni $\boxed{inv}$ (ose $\boxed{2^{ndf}}$), por pastaj shtypet butoni me $\boxed{sin}$. Rezultati i fituar është këndi $\alpha = 47{,}9713^0$.

$0{,}74281 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{sin} = 47{,}9713^0.$

Duke i shndërruar në shkallë, fitohet $\alpha = 57^0\ 58'\ 17$.

Nëse kalkulatori ka buton $\boxed{sin^{-1}}$, atëherë ecuria është kështu:

a) $0{,}74281 \longrightarrow \boxed{sin^{-1}} = 47{,}9713\,^0.$

b) $0{,}23849 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{cos} = 76{,}2026^0;\quad \alpha = 76^0 12' 9''.$

c) $3{,}82611 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{tg} = 75{,}3527^0;\quad \alpha = 75^0 21' 10''.$ ♦

Detyra për punë të pavarur

Me ndihmën e kalkulatorëve njehso funksionet trigonometrike për çdonjërin nga këndet:

1. a) 48^0; b) $23^0 12' 23''$; c) $16{,}19^0$.

2. a) $\dfrac{2\pi}{7}$; b) $\dfrac{5\pi}{21}$.

3. Me ndihmën e kalkulatorit cakto këndin e ngushtë α nëse:

a) $\sin\alpha = 0{,}58362$; b) $\cos\alpha = 0{,}71419$; c) $tg\alpha = 2{,}4183$;

ç) $\sin\alpha = \dfrac{4}{9}$; d) $\cos\alpha = \dfrac{5}{7}$; e) $ctg\alpha = \dfrac{4}{13}$.

4. Për $\alpha = 34^0 28'$, njehso:

a) $\sin\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\sin\alpha}{2}$; b) $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$.

5*. Llogarit këndin α nëse:

a) $\sin\alpha = tg 23^0 37'$; b) $\cos\alpha = 5 \bullet \sin 11^0$; c) $tg\alpha = \sin 32^0 19' + \cos 59^0 25'$.

4. 4. Lidhja ndërmjet funksioneve trigonometrike prej këndit të njëjtë

Është e njohur se te trekëndëshi kënddrejtë ABC (fig.11) vlen barazimi $a^2 + b^2 = c^2$. Nëse kjo është barazim pjesëtohet me c^2 fitohet $\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2}$, përkatësisht $\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = 1$. Prandaj kemi se

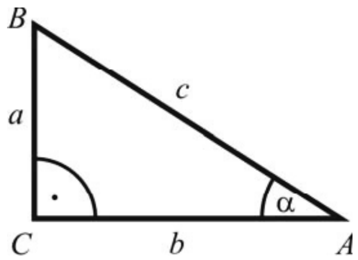


Fig. 11

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Pasi $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ dhe $\frac{b}{c}=\cos\alpha$, me zëvendësim te barazimi i fundit kemi

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \qquad (1)$$

1. Për shembull, për $\alpha = 30^0$, kemi se

$$\sin^2 30 + \cos^2 30\ \sin^2 30+\cos^2 30=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1. \ \blacklozenge$$

Duke e shfrytëzuar barazimin (1) mundemi ta shprehim funksionin sinus prej çfarëdo këndi të ngushtë nëpërmjet kosinusit prej atij këndi dhe anasjelltas, përkatësisht:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \text{dhe} \qquad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ .$$

2. Llogarit $\cos\alpha$, nëse $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}. \ \blacklozenge$$

3. Thjeshtoje shprehjen $(1 + \cos\alpha) \bullet (1 - \sin\alpha)$.

Me këtë shembull do të tregojmë se si barazimi (1) mund të shfrytëzohet për thjeshtimin e shprehjeve. Pikërisht:

$(1 + \cos\alpha) \bullet (1 - \sin\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$ ◆

Për trekëndëshin kënddrejtë *ABC* (fig. 11) kemi se:

$$tg\alpha=\frac{a}{b} \ \text{ dhe } \ ctg\alpha=\frac{b}{a}$$

Nëse i pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin e anëve të djathta prej këtyre barazimeve $c(c \neq 0)$ fitojmë

$$tg\alpha=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \ \text{ dhe } \ ctg\alpha=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}. \qquad (2)$$

Nëse shumëzojmë tg α dhe ctg α fitojmë edhe një barazim

$$\boxed{tg\alpha\cdot ctg\alpha=1} \qquad (3)$$

4. Me llogaritje direkte fitohet se

$$tg60^0 \cdot ctg60^0 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} = \frac{3}{3} = 1 . ♦$$

5. Njehso tgα**,** nëse ctgα = 2.

Prej $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} = \frac{1}{2}$ kemi se $tg\alpha = \frac{1}{2}$. ♦

Me ndihmën e lidhjeve themelore të funksioneve trigonometrike prej këndeve të ngushtë të dhëna me barazimet (1), (2) dhe (3), nëse dihet vlera vetëm e njërës prej tyre, mund të njehsohet vlera e tre funksioneve tjera..

6. Nëse $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, njehso sa është cos α.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} . ♦$$

7. Nëse tgα = 2, njehsoi funksionet tjera trigonometrike të këndit α.

Prej barazimit $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ vijon se $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$, përkatësisht sin α = 2cos α. Nga ana tjetër $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, pra $(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 5\cos^2\alpha = 1$. Prandaj $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$, përkatësisht $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Më tutje njehsohet se

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ dhe } ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{2} . ♦$$

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso funksionet tjera trigonometrike nëse është dhënë:

a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; b) $\cos\alpha = 0{,}25$; c) $tg\alpha = \frac{4}{5}$; ç) $ctg\alpha = 0{,}41$.

2. Thjeshtoi shprehjet:

a) $1-\cos^2\alpha$; b) $\sin^2\alpha - 1$; c) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

3. Vërteto se:

a) $\sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha = 1$; b) $\sin^2\alpha \cdot \left(1+ctg^2\alpha\right) + \cos^2\alpha \cdot \left(1+tg^2\alpha\right) = 2$.

4. Vërteto se për çdo kënd të ngushtë α vlen:

a) $tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = tg^2\alpha - \sin^2\alpha$; b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$;

c) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = tg\alpha - ctg\alpha$;

5*. Vërteto se për çdo kënd të ngushtë α vlen:

a) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$; b) $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = 2.$

6. Nëse $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$, njehso $\dfrac{5\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}$.

7. Llogarite vlerën e shprehjes $4tg\alpha$ - $3\sin\alpha$ nëse $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

4. 5. Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë

Le të jenë *a, b* dhe *c* brinjët e trekëndëshit kënddrejtë *ABC* (fig. 12), kurse α dhe β janë këndet e tij të ngushtë. Atëherë këndet e tij të ngushtë. Rrjedh se:

$$\alpha + \beta = 90^0 \text{ dhe } a^2 + b^2 = c^2.$$

Përveç kësaj prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike kemi:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \frac{a}{b} = tg\alpha$$

$$\frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad \frac{a}{b} = ctg\beta$$

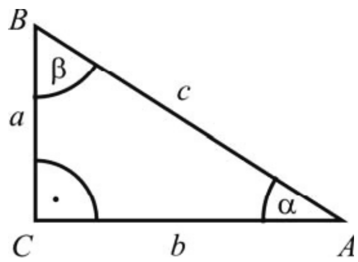


Fig. 12

Këto relacione do t'i shfrytëzojmë për njehsimin e elementeve themelore të trekëndëshit kënddrejtë (brinjët e tij dhe këndet) në rastin kur është dhënë:

- një brinjë dhe një kënd i ngushtë;
- dy brinjë.

Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë domethënë të njehsohen elementet e tij themelore në bazë të elementeve të dhëna, prej të cilave të paktën njëra është brinjë.

1. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë me hipotenuzë $c = 93\ cm$ dhe këndi $\alpha = 42^0 23'$.

Duhet t'i njehsojmë të dy katetet *a* dhe *b* dhe këndin e ngushtë β. Këndi mundet menjëherë të njehsohet: $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 42^0\,23' = 47^0\,37'$.

Që ta njehsojmë katetet *a*, së pari njehsojmë $\sin 42{,}3833^0 = 0{,}67409$, kurse pastaj prej $a = c \bullet \sin\alpha = 93 \bullet 0{,}67409 \approx 63$ gjejmë se $a \approx 63\ cm$.

Kateten b mund ta njehsojmë me ndihmën e hipotenuzës dhe kosinusit të këndit α me zbatimin e teoremës së Pitagorës

Mënyra I. $b = c \bullet \cos\alpha = 93 \bullet \cos 42{,}3833^0 = 93 \bullet 0{,}73865$, përkatësisht $b \approx 69$ *cm.*

Mënyra II . $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69\,cm.$ ♦

2. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë me katete $a = 21$ *cm* dhe $b = 15$ *cm.*

Duhet të njehsohet hipotenuza dhe të dy këndet e ngushtë . Hipotenuzën do ta njehsojmë me zbatimin e teoremës së Pitagorës:

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25\,cm.$

Këndin α do ta caktojmë me ndihmën e funksionit tangens. Prej $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1{,}4$

Njehsojmë se $\alpha \approx 54^0\ 28'$. Për këndin β kemi se: $\beta = 90^0 - \alpha \approx 90^0 - 54^0 28'$, përkatësisht $\beta \approx 35^0 32'$. ♦

3. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë me katete $b = 53$ *cm* dhe këndin $\beta = 64^0$.

Sipas kushteve të detyrës duhet të njehsojmë dy këndet tjera të ngushta, katetën dhe hipotenuzën, Njehsojmë: $\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 64^0 = 26^0$;

$a = b \bullet tg\ \alpha = 53 \bullet tg 26^0 = 53 \bullet 0{,}48773 \approx 26$, përkatësisht $a \approx 26$cm. Prej $b = c\sin\beta$ kemi se,

$c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{53}{\sin 64^\circ} \approx \frac{53}{0{,}89879}$, përkatësisht c ≈ 59 cm. ♦

4. Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë me katetë $a = 37$*cm* dhe hipotenuzë $c = 48$ *cm.*

Duhet të njehsohen këndet e ngushta α dhe β dhe kateta b.

Prej $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{37}{48} = 0{,}77083$ kemi se $\alpha \approx 50{,}42878^0$, përkatësisht $\beta \approx 50^0 25' 44'$ dhe $\beta = 90^0 - \alpha \approx 39^0\ 34'\ 16''$. Prej $b = c \bullet \sin\ \beta = 48 \bullet \sin 39^0\ 34\ 16'' \approx 48 \bullet 0{,}63704 \approx 31$ gjejmë se $b \approx 31$ *cm.* ♦

Të zgjidhurit e trekëndëshit kënddrejtë ka zbatim të madh në zgjidhjen e detyrave nga lëmia e planimetrisë, por edhe nga jeta e përditshme. Zbatimin e këtillë do ta ilustrojmë me disa shembuj.

5. Njehso brinjët e rombit nëse është dhënë këndi i tij i ngushtë $\alpha = 66^0$ dhe njëra prej diagonaleve $d_1 = 34$ cm.

Le të jenë dhënë këndi α te kulmi A dhe diagonalja d_1 e tërhequr prej atij kulmi (fig. 13). Prej trekëndëshit kënddrejtë ABS kemi

$$\frac{d_1}{2} = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}; \quad 17 = a \cdot \cos 33^0; \qquad a = \frac{17}{\cos 33^\circ} = \frac{17}{0{,}83863} \approx 203\,cm. \ \blacklozenge$$

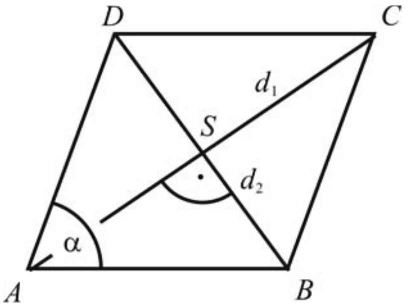


Fig. 13

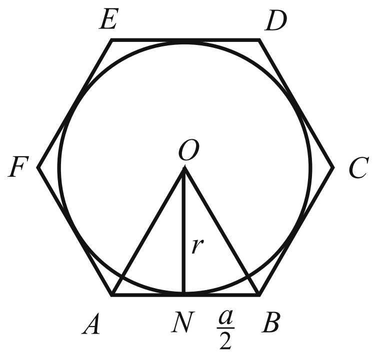


Fig. 14

6. Njehso brinjën e gjashtëkëndëshit të rregullt nëse dihet rrezja e vijës rrethore të brendashkruar $r = 12$ cm.

Te figura 14 është vizatuar gjashtëkëndësh i rregullt *ABCDEF.* Trekëndëshi *ABO* është barabrinjës. Këndi *BON* është 30°. Prej trekëndëshit kënddrejtë *NBO* vijon se:

$$\frac{a}{2} = r \cdot tg30^\circ \approx 12 \cdot 0{,}57735 \approx 6{,}9282; \quad a \approx 13{,}85cm. \ \blacklozenge$$

7. Njehso largësinë ndërmjet pikave *A* dhe *B* të cilat gjenden në anë të ndryshme të një lumi (fig. 15).

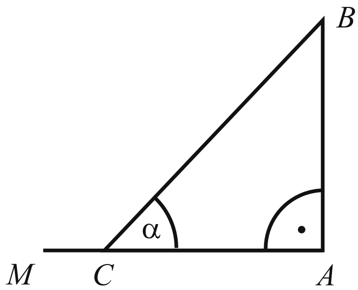


Fig. 15

Te pika *A* konstruktojmë kënd të drejtë *BAM.* Në fund të atij këndi marrim pikë *C* dhe e masim këndin ACB. Madhësia e atij këndi le të jetë $\alpha = 49°$. E masim largësinë ndërmjet pikave *A* dhe *C* dhe le të jetë $d = 28$ *m.* Atëherë kemi

$$\overline{AB} = d \cdot tg\alpha = 28 \cdot tg49^0 \approx 28 \cdot 1{,}15037 \approx 32,$$

$$\overline{AB} \approx 32\,m. \ \blacklozenge$$

Detyra për punë të pavarur

Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë *ABC* nëse:

1. a) $\alpha = 36{,}2^0,\ c = 68cm;$ b) $\beta = 15{,}8^0,\ c = 12{,}2cm;$ c) $\beta = 65{,}4^0,\ a = 2{,}25cm.$

2. a) $\alpha = 82^0,\ b = 246cm;$ b) $\beta = 48^0\,30',\ b = 74{,}7cm;$ c) $\alpha = 24^0,\ a = 5{,}25cm.$

3. a) $a = 230cm,\ c = 320cm;$ b) $a = 52{,}5cm,\ b = 28cm;$ c) $b = 3{,}9cm,\ c = 4{,}5cm.$

4. Rrezja e vijës rrethore është 13*cm* , gjatësia e kordës *AB* është 10*cm*. Njehso madhësinë e këndit *AOB*.

5. Lartësia e trapezit barabrinjës është 6 cm, kurse bazat e kanë gjatësinë 4*cm* dhe 20 *cm*, përkatësisht. Njehso këndet e trapezit.

6*. Mbi vendin *A* gjendet aeroplani në lartësi prej 4000 metro. Në atë moment prej tij shihet vendi *B* nën këndin prej 17°. Në çfarë largësie gjendet aeroplani prej vendit B dhe sa është largësia ndërmjet vendeve *A* dhe B?

4. 6. Detyra për ushtrime

1. Shndërroi në shkallë, minuta dhe sekonda këndet:

a) $34{,}41^0$; b) $18{,}27^0$; c) $23{,}67^0$.

2. Shndërroi në shkallë dhjetore këndet:

a) $36^0 25' 36''$; b) $45^0 11' 19''$; c) $73^0 52' 25''$.

3. Shndërroi në radian këndet:

a) 25^0; b) $62^0 15'$; c) $35^0\ 5' 38''$.

4. Shndërroi në shkallë këndet të dhënë në radian:

a) $\frac{7\pi}{12}$; b) 1,27; c) 0,45.

5. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $\frac{\sin 30^0 - \cos 30^0}{5ctg 60^0 tg 30^0}$; b) $\frac{tg 45^0}{2\cos^2 30^0 - 1}$; c) $\frac{tg\alpha \cdot ctg\alpha}{1-\cos\alpha}$, за $\alpha \neq 0$.

6. Cakto këndin α për të cilin:

a) $\sin\alpha = \cos 65^0$; b) $\cos\alpha = \sin 42^0 50'$;

c) $\sin(\alpha + 20^0) = \sin 50^0$; ç) $tg(\alpha - 15^0) = ctg(\alpha + 25^0)$.

7. Njehso vlerën e funksioneve tjera trigonometrike, nëse është dhënë:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; c) $tg\alpha = \frac{3}{5}$; ç) $ctg\alpha = \frac{7}{25}$.

8. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $4tg\alpha + 5\cos\alpha$, nëse $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; b) $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, nëse $tg\alpha = 2$.

9. Zgjidhe trekëndëshin kënddrejtë ABC, nëse janë dhënë:

a) $\alpha = 36^0 2'$, $c = 68$; b) $\beta = 64^0 20'$, $a = 450$; c) $\beta = 85^0 10'$, $b = 0{,}62$;

ç) $a = 230$, $c = 320$; d) $b = 3{,}9$, $c = 42{,}5$.

10. Te trapezi barakrahës, janë të njohura baza *a,* krahu *c* dhe këndi α pranë bazës. Njehso bazën tjetër dhe lartësinë e trapezit.

11*. Këndi nën të cilin shihet feneri prej anijes së udhëtarëve është 25,6°. Pasi që anija është afruar për 1050 metro deri te bregu, këndi është 31,2°. Në çfarë lartësie është vendosur feneri, duke matur prej nivelit të ujit.

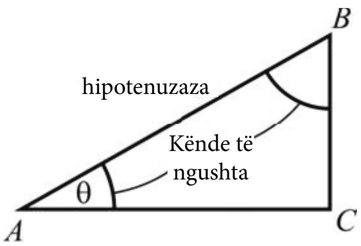
Pasqyra tematike

Një shkallë (1°) është njësia matëse për matjen e këndeve të përkufizuar si $\frac{1}{360}$ pjesë e këndit të plotë. Njësi më të vogla se një shkallë dhe pjesë prej një njësie të matjes është **një minutë (1')** e cila përkufizohet $\frac{1}{60}$ si pjesë e një shkalle dhe **një sekondë (1")** të përkufizuar si $\frac{1}{60}$ pjesë e një minute, përkatësisht, $\frac{1}{3600}$ pjesë e shkallës.

Madhësia e këndit qendror te vija rrethore harku rrethor i të cilit e ka gjatësinë të barabartë me gjatësinë e rrezes së asaj vije rrethore, quhet **një radian** dhe shënohet me **1 rad.**

Lidhja ndërmjet të dy njësive matëse për matjen e këndeve, shkalla dhe radiani është dhënë me formulën

$$\boxed{360^0 = 2\pi rad}$$



Te trekëndëshi ABC këndi pranë kulmit C është kënd i drejtë, kurse të dy këndet pranë kulmeve A dhe B janë kënde të ngushtë.

Nëse e shënojmë me θ këndin e ngushtë pranë kulmit A atëherë brinja BC quhet kateta **e përballtë ,** kurse brinja te Fig. 2 AC katetë **përbrij** këndit θ.

Funksionet të cilat e përshkruajnë varësinë ndërmjet gjatësive të brinjëve te trekëndëshi kënddrejtë dhe këndet e tij të ngushtë quhen **funksione trigonometrike.** Ato funksione shprehen edhe në këtë mënyrë:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{kateta përballë këndit } \alpha}{\text{hipotenuza}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{kateta përbrij këndit } \alpha}{\text{hipotenuza}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{kateta përballë këndit } \alpha}{\text{kateta e përbrij këndit } \alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{kateta përbrij këndit } \alpha}{\text{kateta përballë këndit } \alpha}$$

Te tabela janë dhënë vlerat për funksionet trigonometrike të disa këndeve:

Shkallë	Radian	*sin*	*cos*	*tg*	*ctg*
0^0	0	0	1	0	/
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

Nëse α është kënd i ngushtë te trekëndëshi kënddrejtë, atëherë

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$$

Nëse *a*, *b* dhe *c* janë brinjë të trekëndëshit kënddrejtë, kurse α dhe β janë këndet e tij të ngushtë, atëherë prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike kemi:

$$\boxed{\frac{a}{c} = \sin\alpha}, \quad \boxed{\frac{b}{c} = \cos\alpha}, \quad \boxed{\frac{a}{b} = tg\alpha}$$

$$\boxed{\frac{a}{c} = \cos\beta}, \quad \boxed{\frac{b}{c} = \sin\beta}, \quad \boxed{\frac{a}{b} = ctg\beta}$$

Këto relacione i shfrytëzojmë për njehsimin e elementeve themelore të trekëndëshit kënddrejtë (brinjët dhe këndet e tij në rastin kur është dhënë:

- një brinjë dhe një kënd i ngushtë;
- dy brinjë.

Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejtë domethënë të njehsohen të gjitha elementet e tij themelore në bazë të elementeve të dhëna, prej të cilëve të paktën njëra është brinjë.

5 DREJTËZA NË RRAFSH

5. 1. Sistemi kënddrejtë koordinativ në rrafsh

Pozita e çdo pike në drejtëzën numerike është njëvlerësisht e përcaktuar, me numrin e vetëm real x, të quajtur **kloordinata e pikës** dhe zakonisht shënohet me O**.** Ngjajshëm, duke shfrytëzuar sistemin kënndrejt koordinativ do të tregojmë se pozita e çdo pike në rrafsh është njëvlerësisht e përcktuar me çiftin e vetëm të rregulluar (x, y) prej numrave real, të quajtura **koordinata të pikës.**

Sistemi kënddrejtë koordinativ përbëhet prej dy boshteve numerike të quajtura **boshte të koordinatave**. Pika te e cila priten të dy boshtet quhet **fillimi i koordinatave** dhe Zakonisht shënohet me *O*. Boshti horizontal quhet boshti x ose **boshti i abshisës,** ndërsa boshti vertikal quhet **boshti** y ose **boshti i ordinatës.** Rrafshi me të cilin është përcaktuar sistemi kënddrejtë koordinativ quhet rrafshi koordinativ.

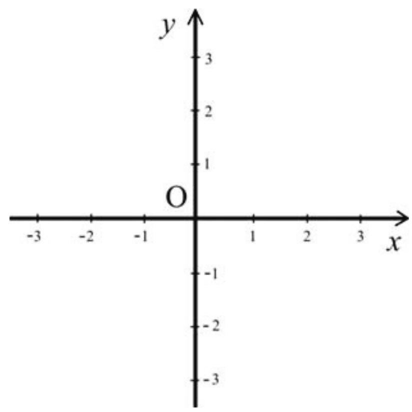


Fig. 1

Zakonisht, te të dy boshtet koordinative zgjedhim një njësi matëse të njëjtë. Si kahe pozitive merret djathtas fillimit të koordinatave, kurse në boshtin e ordinatave fillimi i koordinatave (fig. 1).

Pika P le të jetë çfarëdo pikë në rrafshin koordinativ dhe le të jenë M dhe N proeksionet e saja në boshtin x dhe boshtin y, përkatësisht. Pikës M në boshtin x i përgjigjet saktë një numër real x. Ngjashëm, pikës M në boshtin x i përgjigjet saktë një numër real y. Sipas pozitës së pikës P është plotësisht e përcaktuar me çiftin e rregulluar (x, y) prej numrave real, të quajtur **koordinata** të pikës P. Poashtu, x quhet **koordinata e parë** ose **abshisa,** kurse y **koordinata e dytë** ose **ordinata** e pikës P dhe shkruajmë $P(x, y)$.

1. Pika P(-3,6) e ka koordinatën e parë x=-3 dhe koordinatën e dytë y=6. ◆

Të konstruktohet, përkatësisht të vizatohet pika $P(x, y)$, domethënë të caktohet pikëprerja e normaleve të boshteve koordinative të cilat kalojnë nëpër pikën P.

2. Konstruktoe pikën P(2,3).

Vizatojmë normale në boshtin x nëpër pikën me koordinatë 2. Ngjashëm, vizatojmë normale në boshtin y nëpër pikën eme koordinatë 3. Pikëprerja e normaleve është pika e kërkuar (fig. 2). ◆

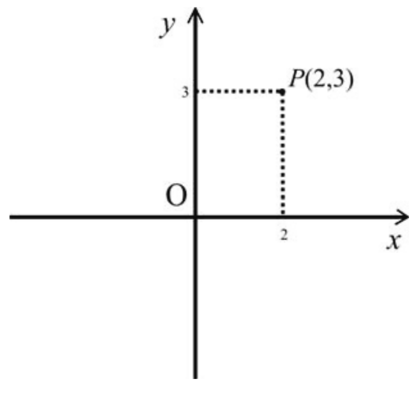


Fig. 2

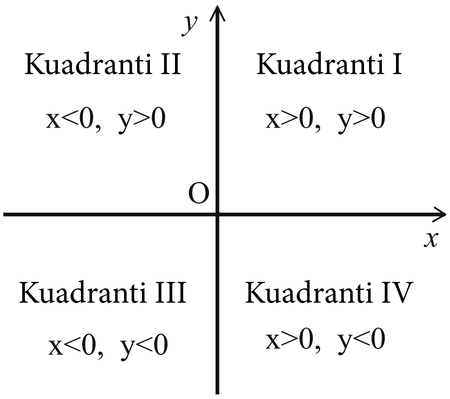


Fig. 3

Boshtet e koordinatave e ndajnë rrafshin e koordinatave në katër pjesë të quajtura **kuadrant.** Si **kuadranti I** merret pjesa lartë djathtas, si **kuadranti i II** merret pjesa lartë majtas, si **kuadranti i III** merret pjesa poshtë majtas dhe si **kuadranti i IV** merret pjesa poshtë djathtas. Prandaj, çfarëdo pikë P(x, y) shtrihet: në kuadrantin I nëse $x > 0$ dhe $y > 0$; në kuadrantin II nëse $x < 0$ dhe $y > 0$; në kuadrantin III nëse $x < 0$ dhe $y < 0$; në kuadrantin IV nëse $x > 0$ dhe $y < 0$; në boshtin x nëse $y = 0$; në boshtin y nëse $x = 0$. Pasi fillimi i mkoordinatave shtrihet edhe te boshti x edhe te boshti y të dy koordinatat e saja janë të barabarta me zero, përkatësisht O(0,0) (fig. 3).

3. Konstruktoi në rrafsh pikat:

a) A(5,2); b) B(4,0); c) C(-3,5); ç) D(0,3);

d) E(-6,-1); e) F(-2,0); f) $G\left(2,-\frac{1}{2}\right)$; g) H(0,-2),

kurse pastaj cakto në cilin kuadrant ose në cilin bosht koordinativ gjenden.

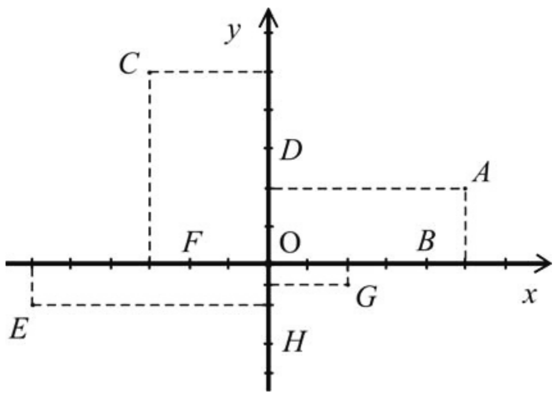


Fig. 4

a) A(5,2) shtrihet në kuadrantin I

b) B(4,0) shtrihet në boshtin x

c) C (-3,5) shtrihet në kuadrantin II-

ç) D(0,3) shtrihet në boshtin y

d) E (-6,-1) shtrihet në kuadrantin III

e) F (-2,0) shtrihet në boshtin x

f) $G\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ shtrihet në kuadrantin IV

g) H (0,-2) shtrihet në boshtin y (fig. 4).

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto në cilin kuadrant ose bosht koordinativ gjenden pikat:

a) A(3,-4); b) B(-1,1); c) C(-3,-5); ç) D(2,3);

d) E(-6,0) ; e) $B\left(0,-\frac{3}{2}\right)$; f) $G\left(\frac{1}{2},0\right)$; g) H(0,-1).

Cakto koordinatat e proeksioneve *M*, *N*, *P* dhe *Q* të pikave A(1,3), B(-2,4), C (5,-2) dhe *D*(-**3,-1**) në:

2. boshtin *x*; **3.** boshtin *y* .

4. Konstrukto segmentin *AB* nëse dihen koordinatat e pikave të skajshme A(1,4) dhe B(5,2). Pastaj caktoi gjatësitë m_x dhe m_y të projeksioneve ortogonale të boshtit *x* dhe *y*, përkatësisht.

5*. Konstrukto trekëndësh ABC, nëse dihen koordinatat e kulmeve të tij: A(1,-3), B(5,2) dhe $C\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

5. 2. Largësia ndërmjet dy pikave

Në këtë mësim, me ndihmën e metodës analitike do ta zgjidhim problemin e njehsimit të largësisë ndërmjet dy pikave në rafshin koordinativ. Pikërisht largësia *d* ndërmjet dy pikave të dhëna M_1 dhe M_2 është gjatësia e segmentit $M_1M_{2,}$ përkattësisht $d = \overline{M_1M_2}$.

Ta zgjidhim rastin më të thjeshtë kur njëra prej pikave të dhëna është fillimi i koordinatave (fig. 5). Le të jetë *N* rënza e normales e lëshuar prej pikës *M*(x, y) në boshtin *x*. Prej trekëndëshit kënddrejtë *ONM* për shkak të teoremës së Pitagorës kemi

$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

1. Njehso largësinë prej pikës *M*(3,4) dhe fillimit të koordinatave.

$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$ ♦

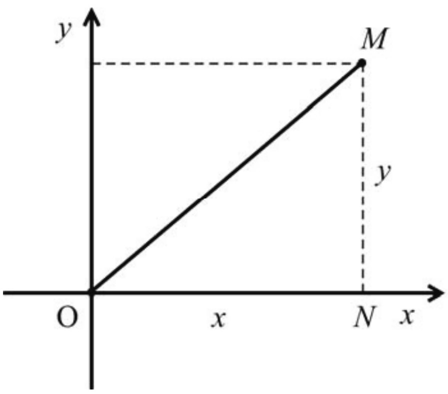


Fig. 5

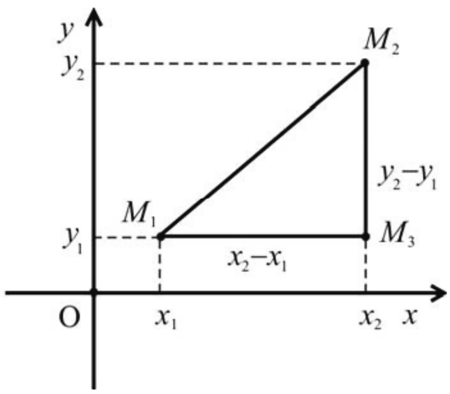


Fig. 6

Të kalojmë në rastin e përgjithshëm. Le të jenë dhënë dy pika $M_1(x_x,y_1)$ dhe $M_2(x_2,y_2)$ largësinë e të cilave d duhet ta caktojmë (fig. 6). Ta shqyrtojmë trekëndëshin kënddrejtë $M_1M_2M_3$. Gjatësitë e kateteve të tija janë $M_1M_2 =| x_2 - x_1 |$ dhe $M_2M_3 =| y_2 - y_1 |$, përkatësisht. Largësia d ndërmjet pikave M_1 dhe M_2 është gjatësia e hipotenuzës M_1M_2, përkatësisht

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

2. Njehso largësinë ndërmjet pikave $M_1(-2,3)$ dhe $M_2(0,-2)$.

$$d = \sqrt{(0-(-2))^2 + ((-2)-3)^2} = \sqrt{29}. \blacklozenge$$

3. Kontrollo *A(3,-6), B(-2,4)* dhe C(1,-2) a shtrihen në një drejtëz.

Do t'i njehsojmë gjatësitë $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ dhe $\overline{BC}$ që të kontrollojmë se ndonjëra prej tyre është shumë e dy të tjerave:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}, \quad \overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}.$$

Prej $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$ vijon se pikat e dhëna shtrihen në drejtëzën e njëjtë. ◆

4. Cakto llojin e trekëndëshit sipas brinjëve, kulmet e të cilit janë A(1,1), *B* (2,3) dhe $C\left(1,\frac{9}{4}\right)$.

T'i njehsojmë gjatësitë e brinjëve të tij $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ dhe $\overline{BC}$

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \qquad \overline{AC} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}, \qquad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

Prej $\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AB}$ mund të përfundohet se trekëndëshi i dhënë është barakrahas. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso largësinë d ndërmjet pikave:

a) $M_1(1,-3)$ dhe $M_2(2,6)$; b) $M_1(0,2)$ dhe $M_2(0,-2)$;

c) $M_1(-1,-2)$ dhe $M_2(2,4)$; ç) $M_1(1,3)$ dhe $M_2(7,0)$.

2. Provo se pikat A(1,-3), B(3,-5) dhe *C* (-5,7) a janë kulmet e treklndëshit.

3. Cakto ordinatën e pikës B, nëse abshisa e saj është e barabartë me 7, kurse largësia e saj *A*(-1,5) është e barabartë me10.

4. Janë dhënë pikat A(5,8) dhe B(-11,-2). Cakto koordinatat e pikës C që është simetrike me pikën *B* në lidhje me pikën A.

5*. Janë dhnë pikat A(1,4), B(3,-9) dhe *C* (-5,2). Vërteto se ato janë kulmet e trekëndëshit dhe cakto gjatësinë e medianës të tërhequr prej kulmit B.

5. 3. Ndarja e segmentit në raport të dhënë

Pë pikën *M* themi se e ndan segmentin *AB* ($A \neq B$) në lidhje λ, duke llogaritur prej *A* nga B, nëse $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

1. Nëse *M* është mesi i segmentit AB, atëherë $\overline{AM} = \overline{MB}$, përkatësisht pika *M* e ndan segmentin *AB* në raport $\lambda = 1$, duke llogaritur prej*A* nga *B* (fig. 7). ◆

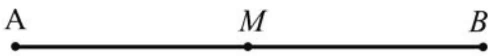


Fig. 7

Fig. 8

2. Pika *P* dhe *Q* le ta ndajnë segmentin AB në tre pjesë të barabarta dhe le të jetë $\overline{AP} < \overline{AQ}$. Atëherë $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{PB}$ dhe $\overline{AQ} = 2\overline{QB}$, prej ku përfundojmë se pika *P* e ndan segmentin AB në raport $\frac{1}{2}$, kurse pika *Q* në raport 2, duke llogaritur prej*A* nga *B* (fig. 8). ◆

Shpesh, në vend që të themi „pika M e ndan segmentin AB në raport λ, duke llogaritur prej A nga B", themi vetë se pika M e ndan segmentin AB në raport λ", duke logaritur poashtu se shenja AB, por jo BA, paraqet se ndarja është prej A nga B.

Numri λ është më i madh se zero nëse dhe vetëm nëse pika M shtrihet ndërmjet pikave A dhe B. Në rastin special, $\lambda = 1$ nëse dhe vetëm nëse pika *M* është mesi i segmentit AB. Më tutje, $\lambda = 0$ nëse dhe vetëm nëse *M* puthitet me pikën A. Nëse $\lambda = -1$, atëherë që nuk është e mundshme. Prandaj $\lambda \neq -1$. Numri λ është më i vogël se zero dhe $\lambda \neq -1$nëse dhe vetëm nëse pika *M* shtrihet te drejtëza AB, jashta segmentit AB.

T'i caktojmë koordinatat e pikës *M(x,y)* që segmenti me pikat e skajshme A(x_1, y_1) dhe B(x_2, y_2) e ndan në raport λ (fig. 9).

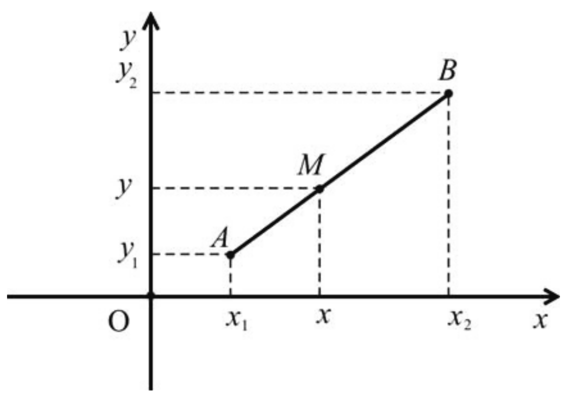


Fig. 9

Prej $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ kemi se $x - x_1 = \lambda\,(x_2 - x)$ dhe $y - y_1 = \lambda\,(y_2 - y)$. Atëherë

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$$

Nëse $\lambda = \dfrac{p}{q}$, atëherë

$$\boxed{x = \frac{qx_1 + px_2}{p+q}} \qquad \boxed{y = \frac{qy_1 + py_2}{p+q}}$$

Në rastin e veçantë, nëse M është mesi i segmentit AB atëherë $\lambda = 1$, pra kemi

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

3. Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC kulmet e të cilit i kanë koordinatat A(-2,-3), B(6,1) dhe C (-4,5). Cakto koordinatat e pikës së rëndimit të trekëndëshit.

Për caktimin e koordinatave të pikës së rëndimit do ta shfrytëzojmë kushtin se pika e rëndimit e ndan çdonjërën nga vijat e rëndimit AA_1, BB_1 dhe CC_1 në raport 2.

Prej $x_{A_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-2+6}{2} = 2$ dhe $y_{A_1} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$ vijon A1(2,-1).

Atëherë $x_T = \dfrac{x_A + 2x_{A_1}}{1+2} = \dfrac{-4+4}{3} = 0$ dhe $y_T = \dfrac{y_A + 2y_{A_1}}{1+2} = \dfrac{5-2}{3} = 1$, prandaj $T(0,1)$. ◆

Detyra për punë të paravur

1. Le të jetë A(3,-7), B(5,2) dhe C(-1,0) janë kulmet e trekëndëshit, Cakto koordinatat e meseve të brinjëve të tij.

2. Le të jetë A(1,1), B(5,11) dhe C(3,-1) janë kulmet e trekëndëshit, Cakto gjatësinë e medianës të tërhequr prej kulmit A.

3. Jane dhënë pikat A(-3,-2) dhe B(7,3). Cakto koordinatat e pikave të cilat segmentin AB e ndajnë në pjesë të barabarta.

4. Janë dhënë pikat A(3,1) dhe B(8,3). Cakto koordinatat e pikës M që segmentin AB e ndan në raport:

a) 2:3 ; b) 3:2 ; c - 2:3 ; ç) - 3:2.

5. Cakto koordinatat e kulmeve të trekëndëshit *ABC* nëse dihen meset e brinjëve të tija P(3,-2), Q(1,6) dhe R(-4,2).

6*. Pikat *A(a1,*a2), *B(b1,b2)* dhe C(c1,c2) le të jenë kulmet e trekëndëshit. Vërteto se për vijën e rëndimit të trekënëdëshit ABC vlen $T\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

5. 4. Syprina e trekëndëshit

Ta njehsojmë syprinën e trekëndëshit me kulme të dhëna $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ dhe $M_3(x_3, y_3)$. Kjo detyrë është më e thjeshtë ta zgjidhim në dy hapa.

Hapi I. Së pari ta caktojmë syprinën e trekëndëshit nëse një kulm i tij është fillimi i koordinatave, kurse kulmi tjetër shtrihet në boshtin *x* (fig. 10). Atëherë kulmi i tretë shtrihet ose mbi boshtin *x*. Duke e shfrytëzuar formulën se syprina e trekëndëshit S është e barabartë me gjysmëprodhimin e gjatësisë së bazës dhe lartësisë, e fitojmë siprfaqen e trekëndëshit S ku

$$S=\frac{|x_1y_2|}{2}$$

e shfrytëzojmë vlerën absolute pasi syprina e madhësisë së njohur, kurse x_1 ose y_2 mund të jenë pozitive ose negative

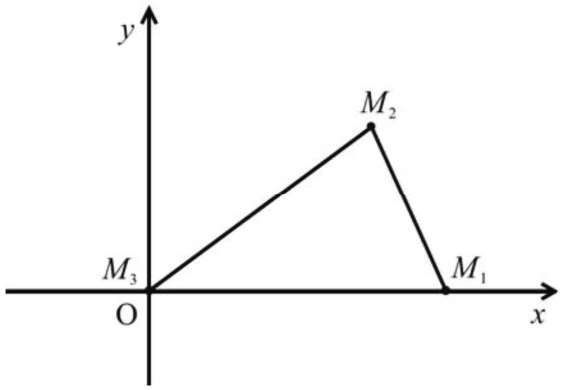


Fig. 10

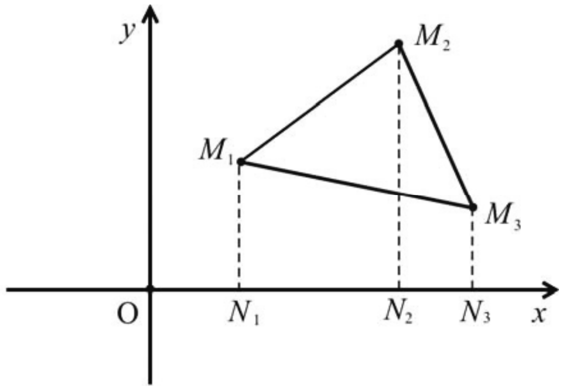


Fig. 11

Hapi i II . Në rastin e përgjithshjëm (fig. 11) syprina e trekëndëshit me kulme të dhëna $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ dhe $M_3(x_3, y_3)$ njehsohet ashtu që shuma e syprinave të trapezave $N_1M_1M_2N_2$ dhe $N_2M_2M_3N_3$ zbriten syprinat $N_1M_1M_3\ N_{3,}$ pra kemi

$$S=\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)+\frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2)-\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)=$$
$$=\frac{1}{2}[y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)].$$

Nëse pika M_2 është nën drejtëzën e përcaktuar me pikat M_1 dhe M_3 fitohet vlerë negative për syprinën e trekëndëshit, pra duhet të shfrytëzojmë vlerën absolute, pasi syprina ëshë madhësi pozitive.

$$\boxed{\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\,|\,y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\,|=\\&=\frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|\end{aligned}}.$$

Prej formulës për njehsimin e syprinës së trekëndëshit mund të fitohet kusht që tre pika të shtrihen në një drejtëz. Nëse të tre pikat shtrihen në një drejtëz, arëherë syprina e trekëndëshit kulmet e të cilit janë ato tre pika është e barabartë me zero.

1. Nnjehso syprinën e trekëndëshit me kulme A(1,2), B(-2,3) dhe C(0,5).

Sipas formulës për njehsimin e syprinës së trekëndëshit kemi

$$S=\frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|=$$
$$=\frac{1}{2}\,|\,1(3-5)-2(5-1)+0(2-3)\,|=4$$

prej ku vijon se syprina e trekëndëshit është 4 njësi. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso syprinën e trekëndëshit me kulme A(-3,2), B(3,5) dhe C(1,-3).

2. Pika P1(-3,-3), P2(3,5) dhe P3(6,9) a janë kulme të trekëndëshit?

3. Shqyrtoi pikat M(1,-3), B(3,5) dhe C(2,1) a shtrihen në drejtëzën e njëjtë.

4. Njehso syprinën e paralelogramit $ABCD$, nëse A(0,1), B(3,7), C(4,4) dhe D(1,-2).

5. Njehso syprinën e trapezit $ABCD$, nëse A(1,4), B(5,3), C (-3,-5) dhe D(-2,1).

6*. Njehso syprinën e trekëndëshave APB dhe BPC, nëse A(1,1), B(-1,-2), C(-4,7) dhe P është pika e mesme e brinjës AC.

5. 5. Forma eksplicite e barazimit të drejtëzës

Pasi drejtëza është koncept themelor gjeometrik e cila nuk përkufizohet, që të vijmë deri te barazimi i saj, është e nevojshme të shfrytëzojmë ndonjë veti të saj. Ta nxjerrim së pari barazimin e dfrejtëzës e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave prej boshteve të koordinatave dhe është e ndryshueshme prej boshteve koordinative (fig. 12).

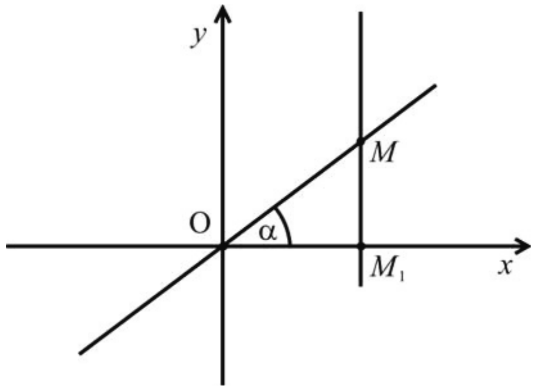


Fig. 12

Le të jetë $M(x, y)$ çfarëdo pikë prej drejtëzës e ndryshueshme prej fillimit të koordinatave. T'i shënojmë me M_1 projeksioni ortogonal i pikës M në boshtin x dhe me α këndin që e formon drejtëza me kahen pozitive të boshtit x. Atëherë raporti

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1O}} = \frac{y}{x} = tg\alpha$$

është konstant për çfarëdo pozitë të pikës M. Ajo shënohet me k dhe quhet **koeficienti këndor** ose **koeficienti i drejtimit** të drejtëzës. Prej këtu vijon se koordinatat e çdo pike prej drejtëzës e kënaqin barazimin

$$\boxed{y = kx}.$$

Megjithatë, barazimi i fundit paraqet drejtëz që kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe me kahen pozitive të boshtit të x formon kënd α, ku $k = tg\alpha$.

1. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe me kahen pozitive të boshtit të x formon kënd $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Pasi drejtëza kalon nëpër fillimin e koordinatave, barazimi i saj është i formë $y = kx$. Prek kushtit të detyrës kemi se $k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{4} = 1$. Prandaj barazimi i kërkuar është $y = x$. ◆

Le të jetë dhënë çfarëdo lloj drejtëte në rrafshin koordinativ. Atëherë të mundshme janë këto tre raste:

• drejtëza i pret boshtet koordinative (fig. 13). Le të jetë $N(0, m)$ pikëprerja e drejtëzës me boshtin y . Megjithatë, ordinata e çdo pike e drejtëzës është më e madhe për m, nëse m është pozitive ose e zvogëluar për m, nëse m është negative, në lidhje me pikat prej drejtëzës që kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe është paralele me drejtëzën e dhënë. Të dy drejtëzat e shqyrtuara formojnë kënde të barabrta me kahen pozitive të boshti të x, prandaj koeficientët e tyre këndore

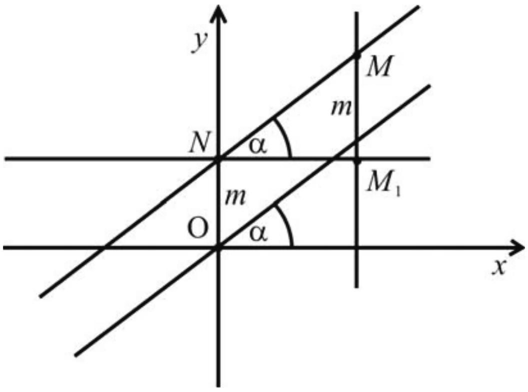


Fig. 13

janë të barabartë. Pasi drejtëza e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave është dhënë me barazimin

$$y = kx,$$

për barazimin e parë kemi:

$$\boxed{y = kx + m},$$

ku k është koeficienti i drejtimit të drejtëzës kurse m është segmenti në boshtin y. Baraztimi i fituar quhet **forma eksplicite e barazimit të drejtëzës** kurse**,** për drejtëzën themi **se** është dhënë në formën ekslicite.

2. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat M (2,-3) dhe N(5,6).

• Sipas kushtit të detyrës, pikat M(2,-3) dhe N(5,6) janë pika të drejtëzës, pra koordinat drejtëzës e kënaqin barazimin $y = kx + m$. Në këtë mënyrë arrijmë deri te sistemi $\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$ zgjidhjet e të cilit janë k=3 dhe m=-9. Prandaj, barazimi i kërkuar është y=3x-9 ◆

Duke pasur parasysh rëndësinë gjeometrike të koeficientit këndor dhe segmenti i boshtit të ordinatave në formën segmentale të drejtëzës mund të përfundohet se:

a) dy drejtëza kanë koeficientin këndor të barabartë nëse dhe vetëm nëse janë paralele;

b) dy drejtëza kanë segmente të barabarta me boshtet e ordintave nëse dhe vetëm nëse e prejnë boshtin e ordinatave në një pikë.

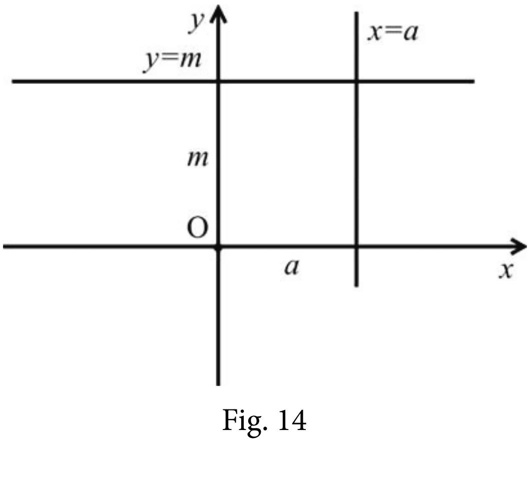


Fig. 14

• drejtëza është paralele me boshtina x ose përshtatet me boshtin x (fig. 14). Atëherë të gjitha pikat prej drejtëzës janë në largësi të barabarta prej boshtit x. Pasi largësia prej boshtit x të asaj pike është ordinata e saj, mund të përfundojmë se të gjitha pika prej drejtëzës së dhënë kanë ndërmjet veti ordinata të barabarta. Nëse atë largësi e shënojmë me m, për barazimin e drejtëzës kemi:

$$\boxed{y = m}$$

Kjo pozitë e drejtëzës mund të trajtohet si rast special i rastit paraprak. Pikërisht, në këtë rast drejtëza foromn kënd $\alpha=2k\pi$, $k=0,1,2,...$ me pjesën pozitive të boshtit të x, prandaj koeficienti këndor $k=0$.Në rastin e veçantë barazimi i boshtit të x është $y=0$;

• drejtëza është paralele me boshtin y ose puthitet me boshtin y (fig. 14). Atëherë të gjitha pikat e drejtëzës janë në largësi të barabarta prej boshtit y. Pasi largësia prej boshtit y të një pike, në rfealitet, është ordinata e saj, mundet të përfundojmë se të gjitha pikat prej drejtëzës së dhënë kanë ordinata të barabarta ndërmjet veti. Nëse atë gjatësi e shënojmë me a, për barazimin e drejtëzës kemi $x=a$.

$\boxed{x = a}$

Në rastin special boshti y është dhënë me barazimin $x = 0$.

3. Si është pozita e drejtëzave $x = 2$ dhe $y = 3$ te rrafshi koordinativ?

Drejtëza $x = 2$ është paralelel me boshtin y dhe çdo pikë e saj është në largësi prej 2 njësi prej saj, ndërsa drejtëza $y = 3$ është paralele me boshtin x dhe çdo pikë e saj është në largësi prej 3 njësi prej saj.

Detyra për punët të pavarur

1. Kontrollo pikat M(-1,1), N(2,-3) dhe P(2,2) a janë pika të drejtëzës $y = - x + 4$.

2. Cakto barazimin e drejtëzës që kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe me kahen pozitive të boshtit x formon kënd prej:

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; c) $\alpha = \pi$.

3. Cakto koeficientin e drejtimit dhe segmentin në boshtin y të drejtëzës të dhënë me:

a) $y = 2x - 3$; b) $y = -x + 3$; c) $y = -2$; ç) $y = \sqrt{3}x$.

4. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila me kahen pozitive të boshtit të x formon kënd $\alpha = \frac{\pi}{3}$ dhe segment në boshtin e ordinatës të barabarta me $-\frac{1}{2}$.

5. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën A(-3,2) dhe me kahen pozitive të boshtit x formon kënd $\alpha = 135^0$.

6. Cakto koeficientin dhe segmentin e boshtit të ordinatës që e pren drejtëza e cila kalon nëpër pikat A(2,-1) dhe B(-3,5).

7*. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikat M (2,-8) dhe N (-1,7).

5. 6. Forma e përgjithshme e barazimit të drejtëzës

Te mësimi paraprak për barazimin e drejtëzës te rrafshi koordinativ fituam barazim të shkallës së parë sipas ndryshoreve x dhe y. Në këtë mësim do të shqyrtojmë çka paraqet barazimi i përgjithshëm i shkallës së parë me dy ndryshore x dhe y, përkatësisht barazimi i formës:

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Supozojmë se $A \neq 0$ ose $B \neq 0$. Me të vërtetë, nëse $A = B = 0$, atëherë barazimi i dhënë sillet në barazimin $C = 0$. Në këtë rast, nëse $C \neq 0$ nuk ekzistojnë pika në rrafsh që e kënaqin barazimin, ndërsa, nëse $C = 0$, të gjitha pikat në rrafsh e këlnaqin barazimin.

• Nëse $A = 0$, atëherë $B \neq 0$, pra drejtëza (1) është erkuivalente me barazimin $y = -\frac{C}{B}$. Vendi gjeometrik i pikave në rrafsh të cilat e kënaqin barazimin e fundit është drejtëz paralele me boshtin x dhe kalon nëpër pikën $M\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

• Nëse $B = 0$ atëherë $A \neq 0$, pra barazimi (1) është ekuivalent me barazimin $x = -\frac{C}{A}$. Vendi gjeometrik i pikave në rrafsh të cilët e kënaqin barazimin e fundit është drejtëz e cila është paralele me boshtin x dhe kalon nëpër pikën $N\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

• Nëse $A \neq 0$ dhe $B \neq 0$, atëherë barazimi (1) është ekuivalent me barazimin $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ e cila është barazim i drejtëzës në formën eksplicite me koeficientin e drejtimit $k = -\frac{A}{B}$ dhe segmentin në boshtin y, $m = -\frac{C}{B}$.

Prej diskutimit të bërë mund të përfundojmë se barazimi i formës

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

është barazimi i drejtëzës, të quajtur **forma e përgjithshme e barazimit të drejtëzës.**

1. Sille në formën e përgjithshme barazimin e drejtëzës $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Barazimi është ekuivalent me barazimin $\frac{1}{2}x + y - 3 = 0$, përkatësisht barazimi $x + 2y - 6 = 0$. ◆

2. Është dhënë barazimi i drejtëzës $3x + 3y - 5 = 0$. Cakto këndin që e formon kahja pozitive e boshtit x dhe segmentin në boshtin y.

Nëse barazimin e dhënë e zgjidhim sipas y e fitojmë barazimin $y = -x + \frac{5}{3}$, që është ekuivalente me barazimin e dhënë, përkatësisht paraqet barazim të një drejtëze të njëjtë në rrafsh. Prej $k = tg\alpha = -1$ vijon se $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ dhe $m = \frac{5}{3}$.

3. Konstrukto drejtëzën të dhënë me barazimin $2x - 3y + 2 = 0$.

Që ta zgjidhim detyrën e parashtruar, mjafton të konstruktojmë dy pika prej drejtëzës kurse pastaj nëpër ato të konstruktojmë drejtëzë (fig. 15). Zgjedhim çfarëdo dy vlera për x, kurse pastaj i zhvendosim vlerat përkatëse për y. Në këtë rast është e përshtatshme vlera e zgjedhur të jetë, për shembull , $x_1 = 2$, pasi në këtë rast fitojmë vlera të numrave të plotë për y, $y_1 = 2$. Ngjashëm, mund të zgjedhim vlerë për x, $x_2 = -1$, prej ku fitojmë vlerë për $y_2 = 0$. ◆

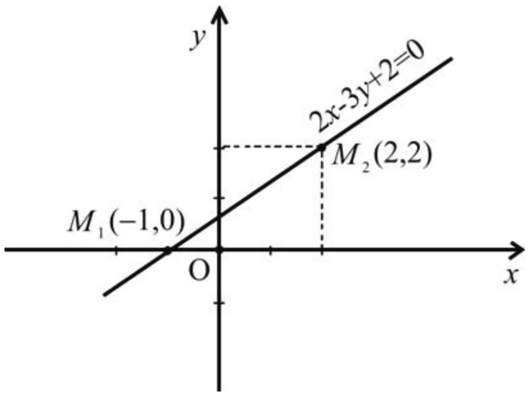


Fig. 15

Detyra për punë të pavarur

1. Silli në formën e përgjithshme këto barazime të drejtëzës:

a) $y = 2x - 3$; b) $y = -4$; c) $x = 3$.

2. Cakto koeficientin e drejtimit dhe segmentin e ordinatës të drejtëzave:

a) $2x - y + 3 = 0$; b) $5x + 2y - 3 = 0$; c) $3x + 8y + 16 = 0$.

3. Është dhënë barazimi i drejtëzës $x + y - 3 = 0$. Caktoi klndet që e formon drejtëza e dhënë me kahen pozitive të boshtit të x dhe segmentin në boshtin y.

4. Konstrukto drejtëzat të dhëna me barazimet:

a) $y = 3x + 1$; b) $x = \sqrt{2}$; c) $y = \pi$;

ç) $y = 2x + 2$; d) $y = \frac{1}{3}x - 2$; e) $x = 0{,}5y - 1$.

5*. Barazimet $Ax + By + C = 0$ dhe $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$, ku $\lambda \neq 0$ janë barazime të një drejtëze të njëjtë në rrafshin koordinativ.

5. 7. Forma segmentale e barazimit të drejtëzës

Sikurse që vërejtëm, barazimi

$Ax + By + C = 0$ (1)

Paraqet barazim të drejtëzës në rrafshin koordinativ. Megjithatë, drejtëza kalon nëpër fillimin e koordinatave nëse dhe vetëm nëse $C = 0$. Koeficienti $A = 0$ nëse dhe vetëm nëse drejtëza është paralele me boshtin e x, ndërsa koeficienti $B = 0$ nëse dhe vetëm nëse drejtëza është paralele me boshtin y.

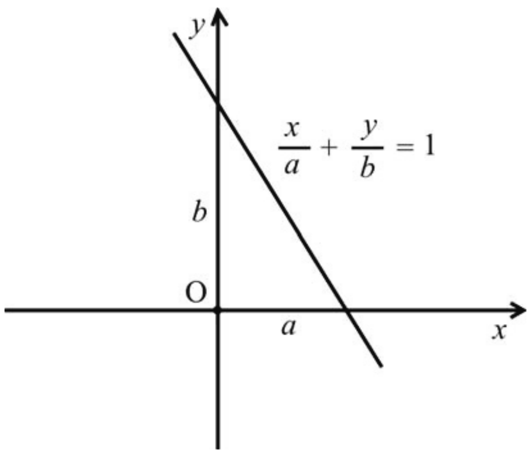


Fig. 16

Supozojmë se drejtëza e dhënë nuk kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe nuk është paralele me asnjërin bosht (fig. 16). Atëherë për koeficientët prej barazimit të saj vlen: $A \neq 0$, $B \neq 0$ dhe $C \neq 0$. Nëse barazimin (1) e shumëzojmë me numrin $-\frac{1}{C}$, ajo e ka formën

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$$

ose

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Nëse vëndojmë $a = -\frac{C}{A}$ dhe $b = -\frac{C}{B}$ atëherë barazimi e ka formën:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Të quajtur **forma segmentale e barazimit të drejtëzës.**

Ta shqyrtojmë rëndësinë gjeometrike të parametrave a dhe b. Nëse te barazimi (2) vëndojmë $y = 0$, kurse pastaj $x = 0$, i fitojmë pikëprerjet $P(a,\mathbf{0})$ dhe $Q(\mathbf{0}, b)$ të drejtëzës me boshtin x, përkatësisht me boshtin y. Prandaj numrat a dhe b sipas vlerës absolute janë të barabarta me gjatësitë e segmenteve që prejnë drejtëza prej boshtit x dhe boshti y, përkatësisht. Ato i quajmë **segmente** të boshteve.

1. Shkruje në formën segmentale barazimin e drjetëzës $x - 3y - 6 = 0$, kurse pastaj cakto gjatësitë e segmenteve te çdonjëra prej boshteve të koordinatave.

Barazimi i dhënë i drejtëzës është barazimi i formës së përgjithshme. Nëse barazimin e shumëzojmë me $-\frac{1}{C}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$, e fitojmë barazimin $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$ që është ekuivalente me barazimin $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$. Barazimi i fundit është shkruar në formën segmentale dhe është ekuivalente me barazimin e dhënë. Gjatësia e segmentit të boshtit x është 6 njësi, ndërsa gjatësi e segmentit të boshtit y është 2 njësi. ◆

2. Njehso syprinën e trekëndëshit të kufizuar me boshtet e koordinatave dhe drejtëzës $2x$ - $5y$ -10= 0.

Pasi boshtet e koordinatave priten nën këndin e drejtë, trekëndëshi i kërkuar është kënddrejtë me kulm pranë fillimit të koordinatave, katetet shtrihen në boshtet koordinative, kurse hipotenuza te drejtëza e dhënë. E dim se syprina e trekëndëshit kënddrejtë është e barabartë me gjysmëprodhimin e gjatësive të kateteve të tija, kurse ato janë pikërisht gjatësitë e segmeneteve të prera në boshtet e koordinatave. Nëse barazimin e drejtëzës e transformojmë në formë segmentale, e fitojmë barazimin $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$. Sipas së cilës, gjatësitë e segmenetve janë 5 njësi dhe 2 njësi. Atëherë syprina e tij është 5 njësi katrore. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Shkruaje në formën segmentale këto barazime:

a) 3x - 2y +12 = 0; b) y = -x +1; c) y = **4**x - 2,

kurse pastaj cakto gjatësitë e segmenteve prej boshteve të koordinatave.

2. Cakto vlerën e parametrit k për të cilën shuma e segmenteve të boshteve koordinative që i pren drejtëza $2x+5ky-3 = 0$ është e barabartë me 10.

3. Cakto vlerën e parametrit k për të cilën prodhimi i segmenteve të boshteve koordinative që i pren drejtëza 6 x + 5 y - 12k = 0 është e barabartë me $\frac{5}{6}$.

4. Njehso syprinën e trekëndëshit të kufizuar me boshtet koordinative dhe drejtëzën x + 2 y - 6 = 0.

5*. Nëpër pikën M (4,-3) tërhiq drejtëz e cila me boshtet koordinative formon trekëndësh me syprinë të barabartë me 3 njësi katrore.

5. 8. Raporti i drejtëzës dhe pikës

5.8.1. Barazimi i tufës së drejtëzave nëpër një pikë

Le të jetë M ($x1$, $y1$) pikë fikse në rrafshin koordinativ. Nëpër pikën e dhënë kalojnë pakufi shumë drejtëza për të cilat themi se formojnë **tufë drejtëzash** me qendër në pikën M (fig. 17). Çdo drejtëz nëpër pikënM e ka formën e përgjithshme

$$Ax + By + C = 0.$$

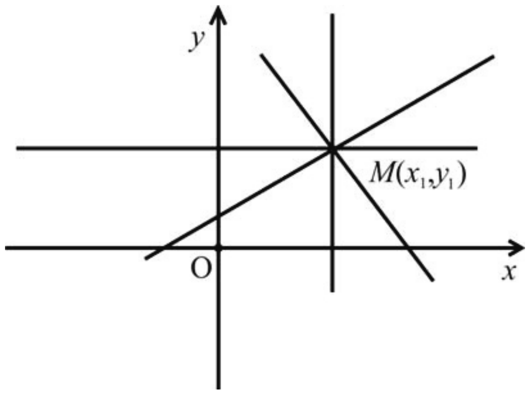


Fig. 17

Pika M shtrihet te drejtëza, pra koordinatat e saja e kënaqin barazimin e drejtëzës, përkatësisht vlen

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Nëse barazimin e dhënë e zbresim prej barazimit të drejtëzës, kemi:

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}$$

Çdo barazim i kësaj forme të drejtëzës që kalon nëpër pikën M pasi koordinatat e saja e klënaqin barazimin. Duke dhënë vlera të ndryshme koeficientëve A dhe B i fitojmë barazimet e drejtëzave të ndryshme nër pikën M .

Prej të gjitha drejtëzave te tufa e drejtëzave nëpër M ekziston e vetmja drejtëz që është paralele me boshtin y. Barazimi i saj është $x = x_1$. E vetmja ajo drejtëz nuk ka koeficient këndor dhe nuk ka segment në boshtin y, prandaj kjo drejtëz nuk mund të jepet në formën eksplicite. Çdo drejtëz tjetër nëpër pikën M ka barazim eksplicit

$$y = kx + n.$$

Pasi pika M shtrihet në drejtëzën, koordinatat e saja e klnaqin barazimin, përktësisht vlen barazimi

$$y_1 = kx_1 + n.$$

Nëse largësin e fituar e zbresim prej barazimit të drejtëzës, kemi:

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

Çdo barazim i kësaj forme është barazim i drejtëzës që kalon nëpër pikën M pasi koordinatat e saja e kënaqin barazimin. Duke dhënë vlera të ndryshme të koeficientit k , i fitojmë barazimet e drejtëzave të ndryshme nëpër pikën M, përveç drejtëzës paralele me boshtin y.

1. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën M(-3,2) dhe me kahen pozitive të boshtit x formon kënd $\alpha = 135^0$.

Tufa e drejtëzave me qendër në pikën M e ka barazimin $y - 2 = k(x + 3)$. Pasi drejtëza e kërkuar prej tufës me boshtin x formon kënd $\alpha = 135^0$, ajo e ka koeficientit këndor $k = tg135° =-1$. Atëherë barazimi i kërkuar i drejtëzës është $y - 2 = -(x + 3)$, përkatësisht $x + y +1 = 0$. ◆

5.8.2. Barazimi i drejtëzës nëpër dy pika

Duke e shfrytëzuar tufën e drejtëzave nëpër një pikë, mundet lehtë ta caktojmë barazimin e drejtëzës që kalon nëpër dy pika të dhëna.

1. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $M_1(-12,5)$ dhe $M_2(8;-3)$.

Tufa e drejtëzave me qendër në M1 e ka barazimin $y - 5 = k\ (x +12)$. Pasi barazimi i kërkuar kalon nëpër pikën M_2, koordinatat e saja e kënaqin barazimin e drejtëzës, përkatësisht vlen barazimi $-3-5=k\ (8+12)$ prej këtu fitojmë se $k = -\frac{2}{5}$. Prandaj, barazimi i drejtëzës është $y - 5 = -\frac{2}{5}(x+12)$, përkatësisht $2x + 5y -1 = 0$. ◆

Shembullin që e shqyrtuam e zbulon mënyrën për gjetjen e barazimit të drejtëzës nëpër dy pika të dhëna. Le të jenë dhënë pikat $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$, (fig. 18). Do ta caktojmë barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat e dhëna, përkatësisht, drejtëza M_1M_2.

• Nëse $x_1 = x_2$, atëherë drejtëza M_1M_2 është normale në boshtin y, pra barazimi i saj në atë rast është

$$\boxed{x = x_1}$$

• Nëse $x_1 \neq x_2$, atëherë tufa e drejtëzave me qendër në $M1$ e ka barazimin

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Pasi drejtëza M_1M_2 kalon nëpër pikën M_2 koordinatat e saja e kënaqin barazimin

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

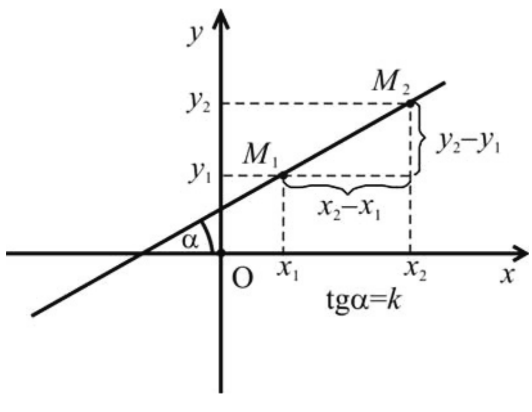


Fig. 18

Atëherë koeficienti këndor i drejtëzës M_1M_2 është

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Nëse vlerën për k e zëvëndësojmë te barazimi i tufës së drejtëzave, e **fitojmë barazimin e drejtëzës nëpër pikat e dhëna:**

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Prej barazimit të drejtëzës nëpër dy pika të dhëna mund të nxjerrim **kushtin për kolinearitet të tre pikave.** Pikërisht, pika e tretë M3(x3, y3) shtrihet te drejtëza e përcaktuar me pikat M_1 dhe M_2 nëse dhe vetëm nëse koordinatat e saja e klënaqin barazimin e drejtëzës të përcaktuar me të dy pikat e dhëna, përkatësisht barazimi

$$\boxed{y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)}$$

5.8.3. Largësia prej pikës deri te drejtëza

Detyra jonë e ardhshme është të mësojmë të njehsojmë largësinë prej pikës së dhënë deri te drejtëza e dhënë në rrafshin koordinativ. Sikurse e dim.largësia prej pikës deri te drejtëza është e barabartë me gjatësinë e normales të lëshuar prej pikës kah drejtëza.

Nëse barazimi i drejtëzës është dhënë në formën e përgjithshme

$Ax + By + C = 0,$

atëherë barazimin duhet ta shumëzojmë me shumëzues të normuiar $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Shenja për shumëzuesin e normuar zgjedhet të jetë i kundërt prej shenjës së koeficientit C. Atëherë largësia prej pikës së dhënë deri te drejtëza në këtë mënyrë që në anën e majtë prej barazimit të drejtëzës, të shkruar në formën

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

I zëvëndësojmë koordinatat e pikës, por pastaj merret vlera absolute prej numrit të fituar. Përfundimisht kemi

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

1. Cakto largësinë prej pikave $A(2,1)$ dhe $B(-2,4)$ deri te drejtëza $4x-3y+15 = 0$. Që ta gjejmë largëcinë prej pikës së dhënë deri te drejtëza, duhet barazimin ta shumëzojmë me shumëzuesin e normuar zgjedhet $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm 5}.$

Shenja e shumëzuesit të normuar të jetë i kundërt prej shenjës së koeficientit C, pra në këtë $M=-\frac{1}{5}$. Atëherë barazimi i drejtëzës është $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0$. Nëse tani zëvëndësojmë koordinatat e pikës së dhënë, kemi $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot 1-3\right|=\left|-4\right|=4$. Pasi shenja e d para se të merret vlera absolute ishte negative, pika A dhe fillimi i koordinatave janë në të njëjtën anë të drejtëzës.

Në mënyrë analoge, për pikën B kemi $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot(-2)+\frac{3}{5}\cdot 4-3\right|=\left|1\right|=1$. Në këtë rast shenja e d para se merret vlera absoluite, ishte pozitive, pra pika B dhe fillimi i koordinatave janë në anbë të ndryshme të drejtëzës. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Shkruaje barazimin e tufës së drejtëzave që kalojnë nëpër pikat:
a) $M(2,-3)$;   b) $M(-1,4)$.

2. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën M (-2,1) dhe e ka koeficientin këndor k = -3.

3. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën M(4,-7) dhe me kahen pozitive të boshtit x formon kënd α = 1200.

4. Cakto koeficientin e drejtimit të drejtëzës që kalon nëpër pikat:
a) $M_1(-1,4)$ dhe $M_2(4;-3)$;   b) $M_1(0,-2)$ dhe $M_2(-1;3)$;   c) $M_1(1,4)$ dhe $M_2(-2,4)$.

5. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $M_1(-1,4)$ dhe $M_2(4,-3)$.

6. Pikat $M_1(0,3)$, $M_2(2,6)$ dhe $M_3(-1,-3)$ shtrihen në të njëjtën drejtëz?

7. Cakto lsargësinë prej pikës A(-5,-1) deri te drejtëza 4 x + 3 y + 30 = 0. Pika e dhënë dhe fillimi i koordinatave a janë në të njëjtën anë të drejtëzës?

8. Cakto largësinë e drejtëzës 9 x -12 y +10 = 0 prej fillimit të koordinatave.

9*. Cakto cila prej pikave M(-3,1) dhe N(5,4) është në largësinë më të vogël prej drejtëzës x - 2 y - 5 = 0. Trego se drejtëza e dhënë nuk e pren segmentin MN.

10*. Cakto barazimin e drejtëzës e cila është në largësi d = 5 prej pikës C (4,3) dhe pren segmenta të barabartë te boshtet e koordinatave.

5. 9. Pozita reciproke e dy drejtëzave

5.9.1. Pozita reciproke e dy drejtëzave

Sikrse e dim, dy drejtëza në rrafsh mund të priten, të jenë paralele ose të puthiten. Le të jenë dhënë dy drejtëza me barazimet e tyre të përgjithshme:

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$A_2 x + B_2 y + C_2 = \mathbf{0}.$

Do ta shqyrtojmë varësinë ndërmjet koeficientëve të drejtëzave të dhëna në çdonjërin prej rasteve të përmendura.

• Drejtëzat e dhëna priten, përkatësisht kanë një pikë të përbashkët nëse dhe vetëm nëse sistemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

ka zgjidhje të vetme.

Le të jetë ($x0$, y0) zgjidhja e vetme e sistemit të dhënë. Nëse barazimi i parë prej sistemit (1) e shumëzojmë me B_2, kurse të dytin me -B_1 dhe pastaj i mbledhim, fitojmë:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x_0 + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0 \qquad (2)$$

Në mënyrë të ngjashme, nëse barazimin e parë prej sistemit (1) e shumëzojmë B_2 kurse të dytën me - B_1 dhe pastaj i mbledhim, fitojmë:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y_0 + (A_1C_2 - A_2C_1) = 0 \qquad (3)$$

Kushti i mjaftueshëm për zgjidhje të vetme (x0, y0), përkatësisht kusht i mjaftueshëm që të priten drejtëzat e dhëna është koeficientët e tyre ta kënaqin relacionin

A_1B_2 - $A_2B_1 \neq 0$, ose

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}},$$

Ku nënkuptojmë se nëse ndonjëri prej emëruesëve është i barabartë me zero, atëherë edhe numëruesi përkatës është i barabartë me zero. Në këtë rast zgjidhja e sistemit të dhënë është:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (4)$$

Numrat e fituar janë koordinata të pikëprerjes së drejtëzave të dhëna. Me të vërtetë, nëse vlerat e fituara për x dhe y prej shprehjes (4) i zëvëndësojmë te (1), do të përfundojmë se barazimet (1) kalojnë në identitete.

1. Trefgo se drejtëzat $2x - y - 5 = 0$ dhe $x + 3y + 1 = 0$ priten.

Pas eleminimit të y, kemi $7x - 14 = 0$, prej ku vijon se $x = 2$. Atëherë për y prej barazimit të parë kemi $y = -1$. ◆

• Që të tregojmë se kushti $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ është i nevojshëm që të priten drejtëzat e dhëna, do ta shqyrtojmë rastin kur

$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Nëse në këtë rast drejtëzat e dhëna kanë edhe nga një pikë të përbashkët (x_1, y_1) prej barazimit (2) dhe (3), vijon:

$C_1B_2 - C_2B_1 = 0$ dhe $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$.

Prej tra barazimeve vijon se ekziston numër real λ ashtu që $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$ dhe $C_2 = \lambda$ C1. Me të vërtetë, pasi njëri prej numrave A1 ose B1 është i ndryshueshëm nga zeroja, mund të supozojmë se $B_1 \neq 0$. Nësde vëndojmë $\lambda = \frac{B_2}{B_1}$ prej barazimit $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ vijon se $A_2 = \lambda A_1$, kurse prej barazimit $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$ vijon se $C_2 = \lambda C_1$. Prandaj, baratzimi i njërës drejtëz fitohet prej barazimit të drejtëzës tjetër i shumëzuar me numrin $\lambda \neq 0$. Kjo do të thotë se drejtëzat e dhëna puthiten. Kushti pët puthitjen e dy drejtëzave është:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}},$$

Ku nënkuptojmë se nëse ndonjëri prej emëruesëve është i barabartë me zero, atëherë edhe numëruesi përkatës është i barabartë me zero.

• Nëse $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ dhe njëri prej numrave $C_1B_2 - C_2B_1$ dhe $A_1C_2 - A_2C_1$ është i ndryshueshëm prej zeros, atëherë sistemi (1) nuk ka zgjidhje, që do të thotë se drejtëzat janë paralele. Prandaj, kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm drejtëzat e dhëna të jenë paralele është kushti

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}.$$

2. Trego se drejtëzat $3x - 2y + 5 = 0$ dhe $4y - 6x - 1 = 0$ janë paralele.

Prej $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} \neq \frac{5}{1}$, vijon se drejtëzat janë paralele. ◆

5.9.2. Këndi ndërmjet dy drejtëzave. Kushti për dy drejtëza normale

Le të jenë dhënë dy drejtëza me barazimet e tyre eksplicite:

$y = k_x x + m_x$ dhe $y = k_2 x + m_2$.

Pasi këndi φ nën të clin priten drejtëzat nuk ndryshon gjatë translacionit të drejtëzave, këndi që e formojnë drejtëzat e dhëna është i barabartë me këndin që e formojnë drejtëzat:

$y = k1x$ dhe $y = k2\, x$.

Atëherë $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Nëse në të dy anët e barazimit zbatojmë tangensin kemi

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

ose nëse e dim se

$tg\alpha_1 = k_1$ dhe $tg\alpha_2 = k_2$

fitojmë se

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

Këndi që fitohet prej kësaj formule është këndi që fitohet me rrotullim të drejtëzës në kahen pozitive rreth pikëprerjes ndërsa nuk puthitet me drejtëzën e dytë (fig. 19).

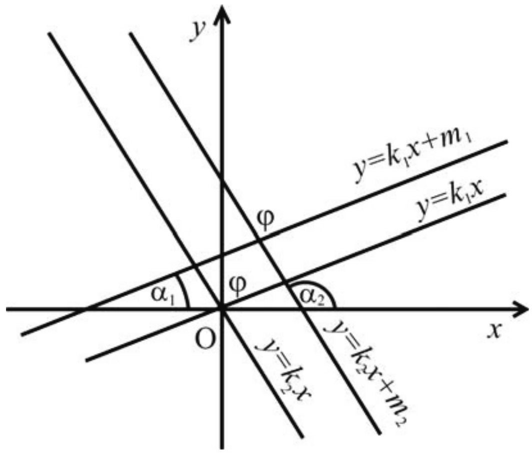


Fig. 19

Nëse njëra prej të dy drejtëzave është paralele me boshtin y, atëherë këndi ndërmjet tyre është $\frac{\pi}{2} - \alpha$, ku α është këndi që e formon drejtëza tjetër me kahen pozitive të boshtit x.

1. Cakto këndinndërmjet drejtëzave $y = 2x - 3$ dhe $3x + y - 2 = \mathbf{0}$.

Për drejtëzën e parë koeficienti i drejtimit $k1 = \mathbf{2}$, kurse për drejtëzën e dytë $\kappa_2 = -3$.

Prandaj, $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-3-2}{1 + 2\cdot(-3)} = 1$, prej ku vijon se $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Nëse drejtëzat janë normale, atëherë $k_2 = tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$, prej ku vijon se $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. **kushti për dy drejtëza normale** është:

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}.$$

Nëse njëra prej të dy drejtëzave është paralele me boshtin y, atëherë ato janë normale nëse dhe vetëm nëse është paralele me boshtin x.

2. Cakto barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $M(\mathbf{-1,1})$ dhe është normale në drejtëzën barazimi i të cilës është $3x - y + 2 = \mathbf{0}$.

Barazimi i tufës së drejtëzave nëpër pikën M është $y + 1 = k(\boldsymbol{x} - 1)$**.** Duhet ta caktojmë barazimin e kësaj drejtëze prej tufës e cila është normale në rejtëzën e dhënë, përkatësisht drejtëzës $y = 3x - 2$. Prej kushtit për normale të dy drejtëzave, kemi $k = -\frac{1}{3}$. Prandaj barazimi i kërkuar është $x + 3y + 2 = 0$. ◆

Nëse drejtëzat janë dhënë me barazimet e tyre të përgjithshme:

$A_1x + B_1y + C = 0$ dhe $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

atëherë duke shprehur koeficientët k_1 dhe k_2 nëpërmjet koeficientëve A_1, B_1, A_2 dhe B_2 kemi

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \text{ dhe } k_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

prej ku këndi ndërmjet dy drejtëzave kemi se

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}} \text{ për } A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0 \text{ dhe } \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}} \text{ për } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Nëse drejtëzat janë dhënë me nbarazimet e përgjithshme, kushti për drejtëza normale është:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$

Detyra për punë të pavarur

1. Konstato cilët prej këtyre drejtëzave priten, cilat janë paralele, dhe cilat përputhen. Në rastin kur drejtëzat priten, cakto pirkëpërerjen:

a) $3x - 2y + 1 = 0$ dhe $2x + 5y - 12 = 0$;

b) $3x + y - 17 = 0$ dhe $6x + 2y + 12 = 0$;

c) $2x - y + 3 = 0$ dhe $6x - 3y + 9 = 0$.

2. Cakto pikëprerjet e boshteve të koordinatave me drejtëza:

a) $x + 10y - 5 = 0$; b) $2x - 3y + 12 = 0$.

3. Cakto barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën A(-2,3) dhe është paralele me drejtëzën $5x-6y+7 = 0$.

4. Cakto këndin ndërmjet drejtëzave $2x - y + 7 = 0$ dhe $3x + y + 10 = 0$.

5. Cakto barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën A(-2,8) dhe formon kënd $\varphi = \frac{\pi}{4}$ me drejtëzën $y = 3x-5$.

6*. Cakto barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën A(3,15) dhe është normale në drejtëzën $3x - 5y + 8 = 0$.

5. 10. Detyra për ushtrime

1. Njehso perimetrin e trekëndëshit *ABC* nëse *A(-5,5), B(7,-3)* dhe *C*(3,1).

2. Cakto koordinatat e pikës *M* që e ndan segmentin *AB* në raport λ**,** nëse:

a) A(10,3), B(-2,-5) dhe $\lambda = \frac{1}{3}$; b) A(-2,-5), B(13,5) dhe $\lambda = \frac{3}{2}$.

3. Pikat A(1,1), B(-1,3) dhe *C(2,0)* shtrihen në një drejtëz. Cakto raportin λ te i cili pika *A* e ndan segmentin *CB.*

4. Njehso perimetrin e trekëndëshit *ABC,* nëse A(0,0), B(3,-2) dhe *C(1,5).*

5. Cakto barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikat $M_1(-7,2)$ dhe $M_2(3,-5)$.

6. Vërteto se pikat A(1,9), B(-2,3) dhe *C*(-5,-3) shtrihen në një drejtëz.

7. Janë dhënë pikat A(-2,-1), B(1,2) dhe *C*(-1,4). Shkruaj koordinatat e pikës D, nëse *ABCD* është paralelogram.

8. Cakto largësinë *d* prej pikës *M*(2,3) deri te drejtëza: a) $3x + 4y - 25 = 0$; b) $12x - 5y + 4 = 0$.

9. Shkruaj barzimet e medianeve të trekëndëshit ABC, nëse A(3,2), B(5,4) dhe *C*(1,4).

10. Është dhënë trekëndëshi *ABC.* Shlkruaj koordinatat e:
a) pikës së rëndimit *T* të trekëndëshit, nëse A(-8,1), B(1,2) dhe C(-5,-3);
b) otoqendrën *H* të trekëndëshit, nëse A(-4,8), B(1,-7 dhe *C*(7,5).

11. Cakto koordinatat e pikës *M* që është simetrike me pikën N(3,2) në lidhje me drejtëzën $x - y + 5 = 0$.

12*. Njehso syprinën e katrorit, nëse dy brinjët e tij shtrihen te drejtëzat $5x\text{-}12y - 65 = 0$ dhe $5x - 12y + 26 = 0$.

13*. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën M(-3,8) dhe me boshtet e koordinatave formon trekëndësh me syprinë $S = 6$.

14*. Cakto koeficientin këndor të lartësive të trekëndëshit *ABC,* nëse *A*(-2,1), *B*(3,4) dhe *C*(1,-2).

Pasqyra tematike

Sistemi kënddrejtë koordinativ përbëhet prej dy boshteve numerike të quajtura **boshte të koordinatave**. Pika te e cila priten të dy boshtet quhet **fillimi i koordinatave** dhe zakonisht shënohet me *O.* Boshti horizontal quhet boshti x ose **boshti i abshisës,** ndërsa boshti vertikal quhet **boshti** y ose **boshti i ordinatës.** Rrafshi me të cilin është përcaktuar sistemi kënddrejtë koordinativ quhet **rrafshi koordinativ**.

Pozita e pikës është plotësisht e përcaktuar me çiftin e rregulluar (x, y) prej numrave real, të quajtur **koordinata** të pikës. Poashtu, x quhet **koordinata e parë** ose **abshisa,** kurse y **koordinata e dytë** ose **ordinata** e pikës .

Boshtet e koordinatave e ndajnë rrafshin e koordinatave në katër pjesë të quajtura **kuadrant.** Si **kuadranti I** merret pjesa lartë djathtas, si **kuadranti i II** merret pjesa lartë majtas, si **kuadranti i III** merret pjesa poshtë majtas dhe si **kuadranti i IV** merret pjesa poshtë djathtas

Largësia ndërmjet dy pikave $M_1(x_1,y_1)$ dhe $M_2(x_2,y_2)$ në rrafshin koordinative njehsohet me formulën

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

Koordinatat e pikës $M(x, y)$ të cilat me pikat e skajshme $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2,y_2)$ e ndajnë në raport λ njehsohet me formulat

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}} \qquad \boxed{y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}}$$

Nëse $\lambda=\frac{p}{q}$, atëherë

$$\boxed{x=\frac{qx_1+px_2}{p+q}} \qquad \boxed{y=\frac{qy_1+py_2}{p+q}}$$

Në rastin special, nëse M është mesi i segmentit AB atëherë $\lambda = 1$, pra kemi

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}} \qquad \boxed{y=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

Syprina e trekëndëshit me kulmet e dhëna $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ dhe $M_3(x_3,y_3)$ njehsohet me formuilën

$$\boxed{\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\, y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\,| = \\ &= \frac{1}{2}|\, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,|.\end{aligned}}$$

Prej formulës për njehsimin e syprinës së trekëndëshit mund të fitohet kusht që tre pika të shtrihen në një drejtëz. Nëse të tre pikat shtiohen në një drejtëz, arëherë syprina e trekëndëshit kulmet e të cilit janë ato tre pika është e barabartë me zero.

Llojet e drejtëzave në rrafsh

• forma eksplicite e drejtëzës thotë

$$\boxed{y = kx + m}$$

ku k është koeficienti i drejtimit të drejtëzës së dhënë, kurse m është segmenti në boshtin y.

• **forma e përgjithshme e barazimit të drejtëzës** është

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

• **forma segmentale e barazimit të drejtëzës** është

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

ku numrat a dhe b sipas vlerës absolute janë të barabarta me gjatësitë që drejtëza i pren prej boshtit x dhe y, përkatësisht. Ato i quajmë **segmente** të boshteve.

• **barazimi i tufës së drejtëzave nëpër pikën** M (x1, y1) është

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

• **barazimi i drejtëzës nëpër dy pika $M_1(x_1, y_1)$** dhe **$M_2(x_2, y_2)$** është

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

XXX

$$\boxed{y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)}$$

Largësia d prej pikës $M(x_1, y_1)$ deri te drejtëza $Ax + By + C = 0$ njehsohet me formulën

$$\boxed{d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Dy drejtëza me barazimet $A_1x + B_1 y + C_1 = 0$ dhe $A_2x + B_2 y + C_2 = 0$ ce:

• priten nëse dhe vetëm nëse

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}}$$

ku koordinatat e pikëprerjes janë dhënë me formulat

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

• përputhen nëse dhe vetëm nëse

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}},$$

Paralele nëse dhe vetëm nëse

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}.$$

Këndi φ nën të cilin priten drejtëzat $y = k1x + \bar{\text{ɯ}}1$ dhe $y = k2x + m2$ të dhënë me barazimet e tija eksplicite njehsohet sipas formulës

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}}$$

Kushti për dy drejtëza normale është

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

Këndi φ nën të cilin priten drejtëzat $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dhe $A_2x + B_2y_{+}C_2 = 0$ të dhënë me barazimet e përgjithshme njehsohet sipas formulës

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}}$$

Atëherë **kushti për drejtëza normale** është

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$

6 PROGRESIONET

6.1. Termi për vargiet

Në jetën e përditshme shpesh hasim konceptin për radhitjen e vargut, për shembull, vargu i sendeve të njëllojtë ose llojeve të ndryshme. Megjithatë në matematikë koncepti për vargun ka domethënie më konkrete.

Ekzistojnë vargje të fundme dhe të pafundme. Te vargjet e fundme kemi numër të fundëm të objeketeve të radhitur sipas një lloj rendi, ku saktë dihet cili element është i pari, cili është i dyti etj. Të supozojmë se kemi pesë elemente të ndomnjë bashkësie. Elementin e parë e shënojmë me $a1$, elementin e dytë a_2, të tretin me a_3 , të katërtin me a_4 dhe të pestim me a_5. Në këtë mënyrë vargun e shkruajmë në këtë formë a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ose a_1,a_2 a_3 a_4 a_5.

Poashtu të përmendim se elementete a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mund të jenë elemente të cilësdo bashkësi. Në matematikë më së shpeshti ato janë numra (natyror, të plotë, racional ose real, por kjo nuk është gjithmonë patjetër të jetë kështu.

Për shembull, çdo fjalë mund të trajtohet si varg prej shkronjave. Në këtë rast elemenetet a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i takojnë ndonjë alfabeti. Numri 5 paraqet **gjatësinë** e vargut të shqyrtuar të fundëm dhe gjatësia nuk është patjetër të jetë e njëjtë Për shembull, fjala „ekonomija" mund të shqyrtohet si varg i fundëm me gjatësi 9 pasi kemi fjalë me 9 shkronja. Të vërejmë se çdo varg i fundëm mund të shqyrtohet si pasqyrim prej ndonjë nënbashkësie prej bashkësisë së numrave natyror {1,2,3,...} në bashkësinë e shqyrtuar. Kështu fjala „ekonomija" mund ta shqyrtojmë si pasqyrim:

$$1 \to \mathrm{e},\ 2 \to \mathrm{k},\ 3 \to \mathrm{o},\ 4 \to \mathrm{n},\ 5 \to \mathrm{o},\ 6 \to \mathrm{m},\ 7 \to \mathrm{i},\ 8 \to \mathrm{j},\ 9 \to \mathrm{a}.$$

Nga ajo parapraakja mund të konstatojmë se: **çdo varg i fundshëm** $a_1,a_2,a_3,a_4,...,a\bar{u}$ **paraqet pasqyrim prej bashkësisë {1,2,3,...,n} në bashkësinë e shqyrtuar dhe poashtu elementi që i korenspondon numrit** i, $1 < i < n$, **shënohet me indeks** i, për shembull, ai,bi,xi,... . Përveç kësaj vargu i fundshëm zakonisht shënohet me (a_i). Shpeshherë ka nevojë të punojmë me vargje të pafundshme. Ato i shënojmë me a_1, a_2, a_3, a_4,... ose shkurtimisht me (ai), ku ai e paraqet elementin që qëndron në vendin i, ku i **është** {1,2,3,...} është çfarëdo lloj numër natyror. Më së shpeshti elementet a_1, a_2, a_3, a_4,... janë disa numra, pra në rastin e përgjithshëm mund të llogarisim se ato janë numra realë.

Përkufizimi 1. Me varg nënkuptojmë pasqyrim prej bashkësisë së numrave natyror në bashkësinë e numrave realë.

Domethënë, me varg nënkuptojmë vargun e pafundëm, por nëse dëshirojmë të theksojmë se kemi varg të fundëm atë zakonisht e theksojmë.

1. Të shqyrtojmë vargun 1,3,5,7,9,11,13,... Në këtë rast pasqyrimi është dhënë me

$f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 5,\ f(4) = 7,\ f(5) = 9,\ f(6) = 11, \ldots$

kurse këtë shkurtimisht nund ta shkruajmë si:

$f(n) = 2n - 1$, ose si $a_n = 2n - 1$. ◆

2. Disa anëtarë të parë të vargut $a_n = n + \frac{1}{n}$ janë $a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_2 = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$, $a_3 = 3 + \frac{1}{3} = 3{,}333\ldots$, $a_4 = 4 + \frac{1}{4} = 4{,}25$, $a_5 = 5 + \frac{1}{5} = 5{,}2$, etj. ◆

3. Disa anëtarë të parë të vargut $a_n = n_2 + n + 1$ janë $a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$, $a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$, $a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$, $a4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$, $a_5 = 5^2 + 5 + 1 = 31$, etj. ◆

4. Disa anëtarë të parë të vargut $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ janë $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$, etj.

5. Vargu *an* = 8 është dhënë me 8, 8, 8, 8, 8, 8,... Domethënë pavarësisht prej indeksit n, *an* ka vlerë 8. Vargjet e këtilla, ku a_n ka vlerë të njëjtë për çdo indeks n i quajmë **vargje konstante.** ◆

6. Ta shqyrtojmë vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 3 + (-1)n$. Duke dhënë vlera 1,2,3,... për n këtë varg mund ta shkruajmë si 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4,.... ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Çka është vargu? Përmend shembull për vargun e fundëm dhe të pafundëm.

2. Shkruaj 5 anëtarët e parë të vargut (a_n), ku:

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$, b) $a_n = \frac{1}{n^2}$, c) $a_n = 2^n$, ç) $a_n = (-1)^n n$.

3. Të caktohet anëtari n i vargut (an), nëse:

a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ për $n = 4$, b) $a_n = n^n$ për $n = 3$, c) $a_n = 3^n$ për $n = 4$.

4. Për cilën vlerë të n vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = (-1)^n n$ ka vlerë 2010?

5. Për cilën vlerë të *n* vargu me anëtarin e përgjithshëm a_n = 4n - 5 merr vlerë 999?

6. Cakto anëtarin e katërt të vargut, me anëtarin e përgjithshëm:

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, b) $a_n = \frac{1}{n+1}$, c) $a_n = (-2)^n$, ç) $a_n = 3$.

7*. Prej pesë anëtarëve të parë të vargut të dhënë të caktohet formula me të cilën do ta përshkruajsh atë varg.

a) 3, 5, 7, 9, 11,... b) 1, 4, 9, 16, 25,... c) 1, 3, 1, 3, 1,...

ç) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ d) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$

6.2. Vargjet rritës dhe zvogëlues

Vargjet mund të kënaqin disa veti. Ato veti shpesh paraqesin kushtet për rritjen dhe zvogëlimin.

Përkufizimi 1. Për vargun (a_n) themi se është:

- rritës (ose monotono rritës), nëse për çdo numër natyror *k* vlen
$$a_{k+1} > a_k, \quad (1)$$
- zvogëlues (ose monotono zvogëlues), nëse për çdo numër natyror *k* vlen
$$a_{k+1} < a_k, \quad (2)$$
- jo rritëse, nëse për çdo numër natyror *k* vlen
$$a_{k+1} \leq a_k, \quad (3)$$
- jo zvogëluese , nëse për çdo numër natyror *k* vlen
$$a_{k+1} \geq a_k\,. \quad (4)$$

kushtu (1) për rritjen e një vargu tregon se çdo anëtar i ardhshëm i vargut është më i madh se anëtari paraprak.

1. Ta shqyrtojmë vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 3n - 2$. Ky varg është rritës pasi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$, përkatësisht 1<4<7<10<... . Drejtpërdrejt bindemi se:

$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - [3n - 2] = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 > 0$, pra prej këtu vijon $a_n+1 > a_n$ për çdo numër natyror n. ◆

Kushti (2) për zvogëlimin e një vargu tregon se çdo anëtar i ardhshëm i vargutështzë më i vogël se anëtari paraprak..

2. Ta shqyrtojmë vargun me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n}$. Ky varg është zvogëlues pasi $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > ...$,përkatësisht $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \ldots$. DreDrejtpërdrejt bindemi se

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

Pra prej këtu është $a_{n+1} < a_n$ për çdo numër natyror *n*. ◆

Kushti (3) tregon se çdo anëtar pasardhës i vargut është më i madh ose i barabartë me anëtarin paraprak, d.m.th., nuk është më i vogël se anëtari paraprak.

3. Ta shqyrtojmë vargun 1,1,2,2,3,3,4,4,.... Ky varg është jozvogëlues pasi $1 \leq 1 \leq 2 \leq 2 \leq 3 \leq 3 \leq 4$... Vargu nuk është rritës pasi anëtari i dytë nuk është më i madh se se anëtari i parë dhe nuk ka nevojë më tutje të kontrollohet. ◆

Kushti (4) tregon se çdo anëtar pasardhës i vargut është më i vogël ose i barabartë me anëtarin paraprak, d.m.th., nuk është më i mad se anëtari paraprak.

4. Ta shqyrtojmë vargun $1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},...$ Ky varg është jorritës pasi $1 \geq 1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \geq \ldots$ Vargu nuk është rritës pasi anëtari i dytë nuk është më i vogël se anëtari i dytë i vargut nk është më i madh se anëtarii parë dhe nuk ka më i madh se i pari dhe nuk ka nevojë më tute të kontrollohet. ◆

Të theksojmë se jo çdo varg patjetër të kënaq ndonjërën prej vetive (1), (2), (3) dhe (4). Kështu është vargu 1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,.... Por shpeshherë edhe pse ndonjëri prej kushteve (1), (2), (3) dhe (4) nuk është i kënaqur për ato vlera të *k* të cilat janë më të mëdhaja se ndonjëri prej numrave *k*0, atëherë merremi vesht të themi se vargu përkatës është rritës, përkatësisht zvogëlues, përkatësisht jorritës, përkatësisht jozvogëlues.

5. Ta shqyrtojmë vargun $3,\ 2,\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, 1\frac{5}{6},...$ Ky varg edhe pse nuk është rritës sipas përkufizimit 1, mund të themi se është rritës në kuptimin më të gjerë pasi duke filluar prej anëtarit të tretë 3>2, për atë mund të themi se është rritës në kuptimin më të gjerë të kuptimit pasi duke filluar prej anëtarit të tretë varguështërritës, përkatësisht $1\frac{1}{2} < 1\frac{2}{3} < 1\frac{3}{4} < 1\frac{4}{5} < 1\frac{5}{6} < ...$ Këtë marrëveshje e përvetësojmë pasi më së shpeshti për neveështl i rëndësishëm se si sillen anëtarë e vargut për vlera të mëdhaja të indeksit. ◆

6. Ta shqyrtojmë vargun $1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6},...$ ky varg edhe pse nuk është zvogëlues sipas përkufizimit 1, për atë mund të themi se është zvogëlues në kuptimin e gjerë pasi duke filluar prej anëtarit të gjashtë të vargut është zvogëlues përkatësisht $1\frac{1}{2} > 1\frac{1}{3} > 1\frac{1}{4} > 1\frac{1}{5} > 1\frac{1}{6} > \ldots$ ♦

Detyra për punë të pavarur

1. Cilët vargje janë rritës, jozvogëlues, zvogëlues, jorritës**?**

2. Përmend shembuj të vargjeve rritëse, jozvogëlues, zvogëluese dhe jorritëse.

3. Është dhënë vargu $a_n = \frac{n}{n+1}$ rritës ose zvogëlues?

4. Cili prej vargjeve:

a) $a_n = \frac{n}{n+2}$, b) $a_n = \frac{1}{3^n}$, c) $a_n = \frac{1}{n^2 + (-1)^{n+1}}$, ç) $a_n = 2^n - 5$, d) $a_n = \frac{5^n}{n}$,

janë rritës, por cilët zvogëlues?

5. a) Një varg a mund të jetë njëkohësisht edhe rritës edhe zvogëlues?
b) Vargu konstant është rritës ose zvogëlues?

6*. Për cilat vlera të numrit pozitiv a ky varg $a_n = a^n$ është:
a) rritës, b) zvogëlues, c) konstant?

6. 3. Progresioni aritmetik

Në këtë temë do të njihemi me dy lloje speciale të vargjeve: vargje aritmetike dhe vargje gjeometrike dhe ato zakonisht quhet përkatësisht progresion aritmetik dhe gjeometrik.

T shqyrtojmë vargun e numrave natyrorë 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Ky varg është varg aritmetik (progresion) pasi 2 -1 = 3 - 2 = 4 - 3 =... përktësisht ndryshimi i çdo dy anëtarëve të njëpasnjëshëm i vargut është numër konstamt. Duke u nisur nga kjo veti e japim këtë përkufizim.

Përkufizimi 1. Një varg (an) quhet aritmetik (progresion aritmetik) nëse ndryshimi $a_{n+1} - a_n$ ndërmjet dy anëtarëve të njëpasnjëshëm të vargut është numër që nuk varet prej n, opërkatësisht ekziston numër real d, ashtu që për çdo numrë real n të vlen $a_{n+1} - a_n = d$. Numri d quhet ndryshimi.

Përveç shembujve me numnrat natyror,do të japim shembuj tjetër.

1. Vargu -4,-1,2,5,8,11,14,...është aritmetik pasi çdo anëtar i ardhshëm fitohet duke shtuar numrin 3, përkatësisht, - 4 + 3 = -1, -1 + 3 = 2, 2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 3 = 11,... Në këtë rast është $d = 3$. ◆

2. Vargu 5,3,1,-1,-3,-5,- 7,... është aritmetik pasi çdo anëtar i ardhshëm fitohet duke shtuar numrin - 2, përkatësisht, 5 - 2 = 3, 3 - 2 = 1, 1 - 2 = -1, -1 - 2 = -3, - 3 - 2 = -5,... Në këtë rast është $d = -2$. ◆

3. Vargu 6, 6, 6, 6, 6, 6,... është aritmetik pasi çdo anëtar i ardhshëm fitohet duke shtuar numrin 0. Në këtë rast është $d = 0$. Në realitet, çdo varg konstant është progresion aritmetik. ◆

Vë rejmë se duke i dhënë anëtarit të parë $a1$, dhe ndryshimi d, progresioni aritmetik është njëvlerë-sisht i përcaktuar. Përkatësisht, anëtarët e vargut janë:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$
$$a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d$$

....

Duke vazhduar këtë mënyrë për anëtarin a_k fitojmë:

$$a_k = a_1 + (k - 1)d. \qquad (1)$$

Kjo në realitet është formula për anëtarin e përgjithshëm të vargut. Me të vërtetë, për k=1 fitohet $a_1 = a_1$, por për a_κ+1, përsëri e fiton të njëjtën formë:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)\,d + d = a_1 + kd.$$

Prandaj, përfundojmë se për çdo numër natyror k anëtari i përgjithshëm është:

$$\boxed{a_k = a_1 + (k-1)d.}$$

4. Një fabrikë për këpucë në vitin e parë të themelimit ka prodhuar 50000 çifte të këpucëve, por çdo vit të ardhshëm prodhimi është rritur 3000 çifte të këpucëve. Sa çifte të këpucëve ka prodhuar fabrika në vitin e tetë të ekzistimit të vet?

Me ak ta shënojmë prodhimin e çifteve të këpucëve në vitin k prej ekzistimit të vet. Është e qartë, kjo paraqet progresion aritmetik me vlerën fillestare $a_1 = 50000$ dhe ndryshimi $d = 3000$. Duke shfrytëzuar formulën (1) për $k = 8$ fitojmë $a_8 = a_1 + (8 - 1)d = 50000 + 7 \bullet 3000 = 71000$.

Domethënë, në vitin e tetë fabrika ka prodhuar 71 000 çifte të këpucëve. ◆

5. Anëtari i parë i një progresioni aritmetik është 8, anëtari i 15 i progresionit është i barabartë 50. Sa është ndryshimi *d* ?

Duke e zgjidhur barazimin (1) sipas *d* kemi:

$$d = \frac{a_k - a_1}{k - 1} \; .$$

Duke zëvëndësuar vlerat e dhëna prej kushtit të detyrës kemi:

$$d = \frac{a_k - a_1}{k - 1} = \frac{50 - 8}{15 - 1} = \frac{42}{14} = 3 \, . \; \blacklozenge$$

6. Anëtari i parë i një progresioni aritmetik është - 3 , kurse ndryshimi është *d* = -2. Të caktohet cili anëtar i vargut është i barabartë me -19?

Duke e zgjidhur barazimin (1) sipas *k* kemi:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 \, .$$

Duke zëvëndësuar vlerat e dhëna prej kushtit të detyrës kemi

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{-19 - (-3)}{-2} + 1 = \frac{-19 + 3}{-2} + 1 = \frac{-16}{-2} + 1 = 9 \, .$$

Domethënë, anëtari i nëntë i vargut pranon vlerë –19. Zgjidhja për numrin *k* ka kuptim vetëm nëse vlera e tij është numër natyror. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Të njehsohet numri tek sipas radhës 150.

2. Të njehsohet numri 75 çift sipas radhës.

3. Të caktohet anëtari i parë i një progresioni aritmetik ndryshimi i të cilit është i barabartë me 2,3 nëse anëtari 85 me radhë është i barabartë me 270,8.

4. Cili prej këtyre vargjeve është progresion aritmetik:

a) 2, 8, 14, 20, 26, ...,6n-4,... b) 1, 8, 27, 81, n^3,...

c) 9,4, -1, - 6, -11,...,14 - 5n,... ç) 1, 2, 4, 8, 16, ...,2_{n-1},...?

Për ato vargje të cilët janë progresione aritmetike të caktohet anëtari i parë dhe ndryshimi.

5. Borxhi i një organizate në 1 janar të vitit 2000 ka qenë 50000 euro, por çdo vit i ardhshëm është zvogëluar për 3500 euro. Pas sa vite borxhi ka qenë 22000 euro?

6*. Anëtari i pestë i një progresioni aritmetik është i barabartë me 12, anëtari i dymbëdhjetë i të njëjtit progresion aritmetik është i barabartë me 33. Sa është ndryshimi dhe sa është anëtari i parë i atij progresioni aritmetik?

7. Nëse te progresioni aritmetik - 3,1,5,9,13,17,... i nënvizojmë anëtarët që qëndrojnë në vendet çifte, çfarë vargu do të fitohet?

8*. Jetoni çdo muaj ka kursyer të njëjtën shumë të parave dhe ka pasur ndonjë shumë fillestare të çarave. Pas muajit të 16 pasi ka filluar të kursen Jetoni ka pasur 54000 denarë, pçor pas muajit 27 pasi ka kursyer Jetoni ka pasur 81500 denarë. Sa para ka pasur Jetoni kur ka filluar të kursen dhe nga sa para ka kursyer çdo muaj?

6. 4. Vetitë e progresionit aritmetik

A. Ta shqyrtojmë këtë shembull.

1. Për progresionin aritmetik të fundshëm 1,4,7,10,13,16, vlejnë barazimet:
1 +16 = 4 +13 = 7 +10 = 10 + 7 = 13 + 4 = 16 +1. ◆

Në rastin e përgjithshëm, le të jetë dhënë progresioni aritmetik i fundshëm:
$a_1, a_2, a_3, ..., a_m, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$.

T'i shqyrtojmë çiftet e anëtarëve:
$(a_1;a_n)$, $(a_2;a_{n-1})$, $(a_3;a_{n-2})$, . . . ,$(a_m;a_{n-m+1})$, . . ., $(a_n;a_1)$,

Shumat e të cilëve të indeksave është e barabartë me n +1, (1 + n = n +1, 2 + (n -1) = n +1, 3 + (n - 2) = n +1m + (n - m +1) = n +1 ,...). Për këto çifte themi se janë **një lloj të larguara prej anëtarëve të skajshëm** a_1 dhe a_n . Pasi:

$a_m = a_1 + (m-1)d$ dhe $a_{n-m+1} = a_1 + (n-m)d$:

me mbledhjen e tyre fitohet

$$a_m + a_{n-m+1} = a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-m)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n .$$

Vërejmë se kjo shumë nuk varet prej numrit m. Domethënë,

$a_m + a_{n-(m-1)} = a_1 + a_n$, për m=1,2,3,...,n. Me këtë e treguam këtë veti:

1°. Te çfarëdo progresion aritmetik, shuma e cilëvedo dy anëtarëve të cilët janë njëlloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm *a1* dhe *an* është e barabartë me shumën e anëtarëve të skajshëm *a1 + an* .

2. Ta shqyrtojmë progresionin aritmetik 5,7,9,11,13,15,17,... Për n = 5 vedtia paraprake tregon se:

5 +13 = 7 +11 = 9 + 9 = 11 + 7 = 13 + 5 (= 18),

ndërsa për n = 6 vetia paraprake tregon se:

5 +15 = 7 +13 = 9 +11 = 11 + 9 = 13 + 7 = 15 + 5 (= 20). ◆

3. Ta shqyrtojmë vargun prej shembullit 2. Vërejmë se anëtari i dytë (7) është mesi aritmetik i anëtarit të parë (5) dhe të tretë (9), anëtari i tretë (9) është mesi aritmetik prej anëtarit të dytë (7) dhe anëtarit të katërt (11),... ◆

Kjo veti vlen edhe në rastin e përgjithshëm.

> **2⁰.** Te progresioni aritmetik çfarëdo, a_m është mesi aritmetik prej a_{m-1} dhe a_{m+1} përkatësisht $1<m$ vlen: $a_m = \dfrac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$.

B. Shpesh herë paraqitet nevoja të njehsohet shuma e n mbledhësave të parë të progresionit aritmetik të dhënë me anëtarin e parë a_1 dhe ndryshimin d. Shumën e kërkuar do ta shënojmë me $S_{n,}$ përkatësisht:

Vërejmë se atëherë vlen gjithashtu:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n .$$

Me mbledhjen e dy baraziomeve të fundit kemi:

$$2S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1) .$$

Prej $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots$ mëtutje kemi $2S_n = n(a_1 + a_n)$,

Nëse në këtë formulë zëvëndësojmë se $a_n = a_1 + (n - 1)d$ kemi:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}. \qquad (1)$$

Kjo është formula e kërkuar për shumën e n anëtarëv e të parë të progresionit aritmetik. Ai i përmban madhësitë $a_{1,}$ d, n dhe S_n dhe mund të shërben për njehsimin e cilësdo vlere, nëse janë dhënë tre të tjerat.

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}. \qquad (2)$$

1. Njehso shumën e n anëtarëve të parë të numrave tek natyror.

Te formula (2) zëvëndësojmë *a1* =1 dhe d = 2 pra kemi:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(2 + 2(n-1)) = \frac{n}{2}(2n) = n^2 . ◆$$

2. Një fabrikë për këpucë në vitin e parë të themelimit ka prodhuar 50000 çifte të këpucëve, por çdo vit të ardhshëm prodhimi është rritur 3000 çifte të këpucëve. Sa çifte të këpucëve gjithsej ka prodhuar fabrika për tetë vitet e ekzistimit të vet?

3duke zëvëndësuar te formula (2) n = 8, a_1 = 50000 dhe d = 3000 kemi:

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 50000 + 7 \cdot 3000] = 4 \cdot 121000 = 484000.$$

Domethënë , për 8 vitet e para janë prodhuar 484000 çifte të këpucave. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto mesin aritmetik të numrave: a) 15 dhe 23, b) $x + y$ dhe $x - y$.

2. Le të jetë dhënë çfarëdo progresion aritmetik. Trego se ekziston anëtar vlera e të cilit është e barabartë me $\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2}$.

3. Zgjedhim çfarëdo progresion aritmetik dhe kontrollo se a vlen:

$$a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}, \ (k < m),$$

përkatësisht a_m është mesi aritmetik prej a_{m-k} dhe a_{m+k}. Pastaj përpiqu të tregojsh këtë veti në rastin e përgjithshëm.

4. Njehso shumën e n anëtarëve të parë të numrave çift.

5. Sa është shuma e 78 numrave të parë të progresionit aritmetik nëse:
a) a1 = 5 dhe $d = 3$, b) a1 = -2 dhe $d = 2$?

6. Shuma e n numrave natyrorë të parë është e barabartë me 1275. Sa është *n?*

7*. Çka mund të përfundojsh për njëprogresion aritmetik nëse vlen:
$a_7 + a_{11} = a_5 + a_{20}$?

6. 5. Progresioni gjeometrik

Deri sa për progresionin gjeometrik vlen se ndryshimi i dy anëtarëve të njëpasnjëshëm është gjithmonë numër i njëjtë, në këtë njësi mësimore do të shqyrtojmë vargje për të cilët herësi i dy anëtarëve të njëpasnjëshëm është një numër i njëjtë. Ato janë progresione gjeometrike. Këto vargje kanë zbatim gjatë caktimit të kamatës të depozitave kursyese.

Përkufizimi 1. Vargu (a_n) i formës

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 \qquad (1)$$

ku $q \neq 0$, quhet **progresion gjeometrik.**

Vërejmë se çdo anëtar i ardhshëm fitohet prej paraardhësit duke shumëzuar me numrin $q \neq 0$. Elementi a është anëtari i parë i vargut, kurse q quhet herësi pasi

$$q = \frac{aq}{a} = \frac{aq^2}{aq} = \frac{aq^3}{aq^2} = \ldots$$

1. Vargu 3,6,12,24,48,96,... është progresion gjeometrik me anëtarin e parë 3 dhe herësin është i barabartë me $2\ (= \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \ldots)$.◆

2. Të formojmë progresion gjeometrik me anëtarin e parë 2 dhe koeficientin - 3. Vargu i kërkuar është 2, 2• (-3), 2• $(-3)^2$, 2• $(-3)^3$,..., përkatësisht 2,-6,18,-54,... ◆

3. Vargu me anëtarin e parë 18 dhe herësin $\frac{1}{3}$ është 8, $\frac{18}{3} = 6$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$,...◆

Nëse $q > 1$, atëherë progresioni gjeometrik është varg rritës nëse $a_1 > 0$, por zvogëlues nëse është $a_1 < 0$.

4. Progresioni gjeometrik 1,2,4,8,16,32,64,128,... me $a_1 = 1 > 0$ dhe $q = 2 > 1$, është rritës. ◆

5. Progresioni gjeometrik -1, - 2, - 4,-8, -16, - 32, - 64, -128,... me a_1 =-1 < 0 dhe q = 2 >1 është zvogëlues. ◆

Nëse $q = 1$, atëherë vargu është konstant, për shembull - 5, - 5, - 5, - 5, - 5,...

Nëse $0 < q < 1$, aytëherë progresioni gjeometrik është varg zvogëlues nëse $a_1 > 0$, por është rritës nëse $a_1 < 0$.

6. Progresioni gjeometrik $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$ me $a1 = 1 > 0$ dhe $q = \frac{1}{2} < 1$ është zvogëlues. ◆

7. Progresioni gjeometrik $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \ldots$ me $a1 = -1 < 0$ dhe $q = \frac{1}{2} < 1$ është rritës. ◆

Nëse $q < 0$, atëherë shenjat e anëtarëve në mënyrë alternative ndryshojnë, pra ai nuk është as rritës as zvogëlues. Kjo mundet të shihet prej shembullit 2.
Prej formulës (1) mund të shihet se:

$$a_2 = a_1 q\,,$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2\,,$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3\,,$$
$$a_5 = a_4 q = a_1 q^4\,,$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad (2)$$

Formula (2) na mundëson të gjejmë cilindo anëtar të vargut nëse është dhënë anëtari i parë dhe herësi.

8. Anëtari i gjashtë i progresionit gjeometrik është përcaktuar me a, = −162 dhe $q = -\frac{1}{3}$ sipas formulës (2) është:

$$a_6 = (-162)\cdot(-\frac{1}{3})^5 = \frac{2\cdot 3^4}{3^5} = \frac{2}{3}.\blacklozenge$$

9. Anëtari i katërt i një progresioni gjkeometrik është 162, kurse anëtari i gjashtë është 1458. Cakto anëtarin e parë dhe herësin.

Prej formulës (2) për $n = 4$ dhe për $n = 6$ kemi:
$162 = a^1 \bullet q^3$ dhe $1458 = a^1 \bullet q^5$.
Me pjesëtimin e barazimit të dytë me barazimin e parë kemi $9 = q2$, prej ku është $q = \pm 3$. Për $q = 3$. Prej barazimit të parë kemi $a_1 = \frac{162}{3^3} = 6$, por nëse a $q = -3$ prej barazimit të parë kemi $a_1 = \frac{162}{(-3)^3} = -6$. ♦

Detyra për punë të pavarur

1. Dy anëtarët e parë të një progresioni gjeometrik janë 48 dhe 24. Cakto anëtarin e pestë të progresionit.

2. Cilët prej këtyre vargjeve janë progresione gjeometrike:

a) 2, - 8,32, -128,512.....2 • $(-4)^{n-1}$,...

b) 1,8,27,81,..., $n3$,...

c) 9,4, -1, - 6, -11,...,14 - 5n,...

ç) 1,2,4,8,16.....2^{n-1},...?

Për ato vargje të cilat janë progresione gjeometrike cakto anëtarin e parë dhe herësin.

3. a) Cakto anëtarin e pestë të një progresioni gjeometrik me anëtarin e parë 2 dhe herësin 1,5.

b) Cakto anëtarin e shtatë të një progresioni gjeometrik me anëtarin e fillimit 1,5 dhe herësi - 2.

4. Dritoni ka deponuar në depozitin kursyes ku kamata v jetore është 6%.

a) Sa përqind qo të zmadhohet depoziti i tij pas 7 vjet?

b) Pas sa vjet depoziti do të jetë të paktën dyherë më e madhe se depoziti fillestar?

5. Agimi dhe Bashkimi kanë deponuar të njëjtën shumë në bankë. Agimi ka deponuar me 3% kamatë dhe i ka ruajtur paratë 4 vjet, kurse Bashkimi i ka deponuar me 4% kamatë dhe i ka ruajtur 3 vjet. Cili prej tyre ka marrë më shumë para prej bankës?

6. Numri i bakterjeve te qumështi dyfishohet në çdo 3 orë. Sa herë do të zmadhohet numri i bakterjeve pas 24 orë?

6. 6. Vetitë e progresionit gjeometrik

A. 1. Ta shqyrtojmë progresionin gjeometrik të fundshëm $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128.$

Vërejmë se $\frac{1}{2} \cdot 128 = 2 \cdot 32 = 8 \cdot 8 = 32 \cdot 2 = 128 \cdot \frac{1}{2}$. ♦

Do të trregojmë se kjo veti vlen edhe në rastin e përgjithshëm. Le të jetë dhënë progresioni gjeometrik i fundshëm $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ Duke shfrytëzuat se $a_2 = a_1 q$ dhe $a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$ kemi

$$a_2 a_{n-1} = a_1 q \cdot \frac{a_n}{q} = a_1 a_n.$$

Mëtutje, duke shfrytëzuar se $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$ dhe $a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{q} = \frac{a_n}{q^2}$ fitohet:

Duke vazhduar këtë mënyrë mëtutje kemi $a_k = a_1 q^{k-1}$ dhe $a_{n-(k-1)} = \frac{a_n}{q^{k-1}}$, kurse prej këtu:

$$a_k a_{n-(k-1)} = a_1 q^{k-1} \cdot \frac{a_n}{q^{k-1}} = a_1 a_n. \qquad (1)$$

Për anëtarët çifte (a_2; a_{n-1}), (a3 ; a_{n-2}), (a4; a_{n-3}), (a_k ; $a_{n-k+1)}$, ($a_{n-1;}$ a_2) për të cilët shuma e indeksave është e barabartë me n +1, themi se **janë një lloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm** a_1 dhe a_n. Prandaj, barazimi (1) e shpreh këtë veti:

1⁰. Prodhimi i çfarëdo dy anëtarëve të progresionit gjeometrik të cilët janë njëlloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm a_1 dhe a_n është e barabartë me prodhimin e anëtarëve të skajshëm.

2. Ta shqyrtojmë progresionin gjeometrik 2,6,18,54,162,486,... Për n = 5 vetia paraprake tregon se:

2•162 = 6•54 = 18•18 = 54•6 = 16•22 (= 324),

ndërsa për n = 6 vetia paraprake tregon se:

2-486 = 6-162 = 18-54 = 54-18 = 162-6 = 486-2 (= 972). ◆

3. Ta shqyrtojmë vargun prej shembullit 2. Vërejmë se anëtari i dytë (6) është mesi gjeometrik prej anëtarit të parë (2) dhe të tretë (18), anëtari i tretë (18) është mesi gjeometrik prej anëtarit të dytë (6) dhe i katërti (54), anëtari i katërtë (54) është mesi gjeometrik prej anëtarit të tretë (18) dhe të pestit (162), etj. ◆

Në rastin e përgjithshëm, prej $a_m = \frac{a_{m+1}}{q}$ dhe $a_m = a_{m-1}q$ kemi:

$(a_m)^2 = a_{m-1}a_{m+1}$, është $a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}$.

Prandaj, vlen kjo veti.

2⁰. Te çfarëdo progresion gjeometrik, për 1 < m vlen $a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}$ përkatësisht a_m është mes gjeometrik prej a_{m-1} dhe a_{m+1} .

Në të njëjtën mënyrë vërtetohet se vlen kjo veti, të cilën e përgjithëson vetia 2⁰.

30. Te çfarëdo progresion gjeometrik, për k < m vlen $a_m = \sqrt{a_{m-k}a_{m+k}}$, përkatësisht am është mes gjeometrikод a_{m-k} dhe a_{m+k}.

4. Ndërmjet numrave 3 dhe 192 të interpolohen pesë numra të cilët me numnrat e dhënë formojnë mes gjeometrik.

Së pari e caktojmë herësin q ashtu që a_1 = 3 dhe a_7 = a_1q6 = 192. Duke zëvendësuar a_1= 3 kemi 3 - q^6 = 192 , prej ku q^6 = 64, q = ±2. Nëse q = 2 fitohet progresioni i fundshëm

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, nëse q = -2 fitohet progression I fundshëm 3, - 6,12, - 24, - 48, - 96, 192. ◆

B. Ta shënojmë me *Sn* shumën e n anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik të dhënë, përkatësisht

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}. \qquad (1)$$

Nëse kjo vlerë shumëzohet me q fitohet:

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \qquad (2)$$

Duke i zbritur barazimin (1) prej barazimit (2) fitohet:

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1,$$

prej ku është:

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1),$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}. \qquad (3)$$

Kjo është formula e kërkuar për shumën e n anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik, Ai i përmban madhësitë a_1, q, n dhe S_n dhe mund të shërben për njehsimin e cilësdo vlerë të tyre, nëse janë dhënë tre të tjerat. Formula (3) zakonisht shfrytëzohet kur $q > 1$, por nëse $q < 1$ zakonisht shfrytëzohet formula e njëjtë por në këtë shënim

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \qquad (4)$$

Nëse $q = 1$, atëherë këto formula nuk mund të shfrytëzohen pasi fitohet shprehje te e cila paraqitet 0 dhe te emëruesi edhe te numëruesi. Por, në këtë rast, është e qartë se $Sn = na_1$.

1. Cakto shumën e 6 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik me anëtarin e parë $a_1 = 3$ dhe $q = 2$.

Duke zëvëndësuar n=6, $a_1 = 3$ dhe $q = 2$ kemi:

$$S_6 = \frac{3(2^6-1)}{2-1} = 3\cdot(64-1) = 3\cdot 63 = 189. \ ◆$$

2. Cakto shumën e 7 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik me anëtarin e parë $a1 = 4$ dhe $q = -3$.

Duke zëvëndësuar n=6, $a_1 = 4$ dhe $q = -3$ kemi:

$$S_7 = \frac{4((-3)^7-1)}{-3-1} = \frac{4(-2187-1)}{-4} = 2187+1 = 2188. \ ◆$$

3. Ckto shumën e *2k* anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik me herësin q = -1. Duke zëvëndësuar $n=2k$ dhe q = -1 kemi:

$$S_{2k}=\frac{a_1((-1)^{2k}-1)}{-1-1}=\frac{a_1(1-1)}{-2}=0.$$

Të vërejmë se ky rezultat dhe natyrisht është të pritet, pasi vargu është dhënë me $a_1,-a_1,a_1,-a_1,\ldots$◆

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso shumën e 8 anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik që fillon me anëtarët:

a) -1,3, - 9,... b) 5, 5, 5,..., c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots,$ ç) 512, -256, 128,...

2. Cakto anëtarin e parë të progresionit gjeometrik për të cilin:

a) n = 8, q = 2, S_6 = 765, b) $n=4$, $q=\frac{2}{3}$, $S_6=65$.

3. Anëtari i pestë i një progresioni gjeometrik është $\frac{1}{9}$, kurse herësi është $-\frac{1}{3}$. Të caktohet anëtari i parë dhe shuma e të pesë anëtarëve të parë. Shkruaje progresioni gjeometrik.

4. Rfroga për muajin janar Petriti e ka pasur 20000 denarë. Deri në fund të vitit çdo muaj rroga i është zmadhuar për 3%. Sa para do të merr Petriti gjatë tërë vitit?

5. Cakto mesin gjeometrik të numrave: a) 30 dhe 120, b) xy dhe $\frac{x}{y}$.

6. Zgjedh progresion gjeometrik çfarëdo dhe kontrollo vetitë 1, 2 dhe 3.

7*. Le të jetë dhënë çfarëdo progresion gjeometri. Trego se ekziston anëtar vlera e të cilit është e barabartë me $\sqrt{a_1a_{2n+1}}$.

6. 7. Detyra për ushtrime

1. Shkruaj vargun që nuk është as rritës as zvogëlues.

2. A ekziston indeks $\bar{u}$ për të cilin anëtari përkatës i vargut 1,4,16,25,36,...,n^2,...pranon vlerë 125?

3. Vargu (a_n) është i atillë që anëtarët e tij tek janë pozitiv, kurse anëtarët e tij çift janë negativ. A është e mundur të jetë rritës ose zvogëlues?

4. Njehso shumën e 1000 numrave të parë natyror.

5. Njehso shumën e 100 numrave të parë të një progresioni aritmetik, nëse anëtari i parë është 7, kurse i njëqindëti është 53.

6.Njehso shumën e 46 anëtarëve të aprë të një prograsioni aritmetik, nëse dihet se $a_2 = 6$ dhe $a_{45} = 74$.

7. Ndërmjet numrave 1 dhe 14 interpolo tre numra *a, b, c* ashtu që vargu 2, a, *b, c,* 14 të jetë progresion aritmetik.

8. Trego se për prodhimin e progresionit aritmetik vlen:
$a_n = a_k + (n - k)d$.

9. Një tregëtar ka shitur tabël shahu në këtë mënyrë: për fushën e parë ka kërkuar 1 denarë, për të dytën ka kërkuar 2 denarë, për të tretën 3 denarë etj. Për sa denarë tregëtari e ka shitur tabelën e shahut?

10. Cakto shumën e $2k$+1 anëtarëve të parë të një progresioni gjeometrik ne anëtarin e parë 100 dhe herës $q = -1$.

11. Cakto numër *b*, ashtu që 3, b, 75 të formon progresion gjeometrik.

12. Trego se për çfarëdo progresion gjeometrik vlen $an = a_k q^{n-k}$

13. Nëse çdo bakterje e një kulture ndahet çdo orë në dy bakterje, sa bakterje do të jenë prezente pas 8 orë nëse në fillim kanë qenë vetëm 7 bakterje?

14. Një fëmijë ka fillëuar të kursen para në kasën e tij prej muajit janar duke vënduar 5 denarë. Çdo uja të ardhshëm fëmija ka vënduar dyherë më shumë para në kasë se sa muajin e kaluar. Sa para ka pasur fëmija në kasë në fund të vitit?

15*. a) Nëse vargu a_1, a_2, a_3 është njëkohësisht edhe varg aritmetik edhe varg gjeometrik, vërteto se $a_1 = a_2 = a_3$.

b) Nëse vargu $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ është njëkohësisht edhe varg aritmetik edhe varg gjeometrik, vërteto se $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$.

16*. Çka mund të përfundosh për një progresion gjeometrik nëse vlen:

$a_2 a_3 = a_1 a_7$?

Pasqyra tematike

Vargu është pasqarim prej bashkësisë N në bashkësinë R. Një varg është

- **rritës,** nëse për çdo numër natyror k vlen $a_{k+1} > a_k$;
- **zvogëlues,** nëse për çdo numër natyror k vlen $a_{k+1} < a_k$;
- **jorritës,** nëse për çdo numër natyror k vlen $a_{k+1} < a_k$;
- **jozvogëlues,** nëse për çdo numër natyror k vlen $a_{k+1} > a_k$;
- **i kufizuar prej lartë,** nëse ekziston numër real M, ashtu që për çdo numër real n vlen $a_n \leqslant M$;
- **i kufizuar prej poshtë,** nëse ekziston numër real M, ashtu që për çdo numër real n vlen $an \geqslant M$,
- **i kufizuar,** nëse është i kufizuar njëkohësisht prej lartë edhe prej poshtë.

Çdo varg zvogëlues dhe çdo varg jorritës është i kufizuar prej poshtë.

Një varg (an) quhet aritmetik nëse ndryshimi a_{n+1} - a_n ndërmjet dy anëtarëve të njëpasnjëshëm të vargut është numër që nuk varet prej n. Ky numër shënohet me d dhe quhet **ndryshimi.** Domethënë për çdo numër natyror n vlen $a_{n+1} - a_n = d$.

Anëtari i përgjithshëm i një progresioni aritmetik është i barabartë me

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}.$$

Te çfarëdo progresion aritmetik shuma e cilëvedo dy anëtarëve të cilët janë një lloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm a_1 dhe a_n është i barabartë me $a_1 + a_n$;

Te çfarëdo progresion aritmetik, për $k < m$ vlen

$$\boxed{a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}}.$$

Shuma e n mbledhësave të parë të një progresioni aritmetik është i barabartë me

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

përkatësisht

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}.$$

Vargu (a_n) i formës $a, aq, aq^2 , aq^3 , aq^4 , ...$ ku $q \neq 0$, quhet **progresion gjeometrrik.** Anëtari i përgjithshëm i këtij vargu është

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}.$$

Prodhimi i çdo dy anëtarëve të progresionit gjeometrik të cilët janë njëlloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm a_1 dhe a_n , është iu barabartë aq_n ;

Te çfarëdo progrsion gjeometrik, për $k < m$ vlen

$$\boxed{a_m = \sqrt{a_{m-k} a_{m+k}}}.$$

Shuma e n anëtarëve të parë të një progresioni gjeometrik është

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}.$$

7. LLOGARIA E KAMATËS SË PËRBËRË

7. 1. Koncepti për logarinë e kamatës së përbërë dhe mënyrat e njehsimit

Kamata e njehsuar e ndonjë shume mund të jetë e thjeshtë dhe e përbërë. **Kamata e thjeshtë** ose interesi i thjeshtë njehsohet në të njëjtën shumë të pandryshuar në çdo periudhë të njehsimit të kamatës.

Te kamata e përbërë kamatizimi, prej periudhës në periudhë, shuma e cila kamatizohet ndryshon, përkatësisht zmadhohet për kamatën e njehsuar prej peiudhës paraprake. Pikërisht kur kapitali gjatë një periudhe të njehsuar zmadhohet dhe me atë paraqet bazë për njehsimin e kamatës për periudhën e ardhshme, flasim për njehsimin e **kamatës së përbërë,** por vet njehsimi quhet **norma e kamatës së përbërë** ose njehsimi i **interesit në interes.**

Njehsimi i kamatës së thjeshtë është direkt e dhënë me formulën $i=\dfrac{Kpt}{100}$, ku t është dhënë në vite. Nëse koha është dhënë në muaj, shfrytëzohet formula $i=\dfrac{Kpm}{1200}$, ku kamatizimi bëhet për muaj m por formula $i=\dfrac{Kpd}{36500}$ shfrytëtohet kur koha është dhënë në d – ditë.

1. Sa kamatë do të paguhet për kapitalin themelor prej 240000 denarë për 2 muaj, me normë të kamatës së thjeshtë prej 6% ?

Prej kushteve të dhëna në detyrë kemi $K = 240000$, $t = 2$ muaj, $p = 6\%$.
Atëherë,

$$i=\frac{Kpt}{1200}=\frac{240000\cdot 6\cdot 2}{1200}=2400 \text{ denarë. } \blacklozenge$$

Për krahasim, së pari, me shembull do ta tregojmë ndryshimin ndërmjet normës së kamatës së thjeshtë dhe të përbërë, kurse pastaj do t'i nxjerrim formulat për njehsimin e kamatës së përbërë.

2. Sa kamatë do të sjellë kapitali prej 34500 denarë, të deponuara në bankë për kohën prej 4 vite, me normë të kamatës 8%, me llogarinë e kamatës së thjeshtë dhe të përbërë?

Për kohën prej një viti, për kapitalin prej 34500 denarë, kamata e thjeshtë e njehsuar është

$$\frac{8}{100}\cdot 34500 = 2760 \text{ denarë.}$$

Pasi kamata njehsohet në kapitalin themelor, sasia për çdo vit të ardhshëm përsëri është 2760 denarë, pra prej këtu, për kohën prej 4 vite kamata e njehsuar është katër herë më e madhe se ajo e njehsuara për një vit. Atëherë kamata e përgjithshme është:

$i = \frac{8}{100} \cdot 34500 \cdot 4 = 11040$ denarë.

Llogaria e kamatës së përbërë, për çdo llogari të ardhshme të kamatës, e përfshijmë edhe kamatën e llogaritur në shumën themelore, pra prej këtu, kamata për vitin e parë, është njëjtë $i_1 = \frac{8}{100} \cdot 34500 = 2760$ denarë, por tani për vitin e dytë, shuma themelore për shumën e parë themelore, shuma themelore është shumë e shumës së parë dhe kamata e parë 34500 + 2760 = 37260 denarë.
Kamata e dytë e njehsuar është $i_2 = \frac{8}{100} \cdot 37260 = 2980{,}8$ denarë.

Për njehsimin e kamatës së tretë, për vitin e tretë, shuma themelore përsëri ndryshon, tani është shuma prej shumës së parë themelore dhe të dy kamatave të njehsuara, përkatësisht 37260 + 2980,8 = 40240,8 denarë. Atëherë $i_3 = \frac{8}{100} \cdot 40240{,}8 = 3219{,}264$ denarë.

Përfundimisht, shuma e fundit në të cilën njehsohet kamata është 40240,8 + 3219,264 = 43460,064 denarë është $i_4 = \frac{8}{100} \cdot 43460{,}064 = 3476{,}8$ denarë.

Kamata e përgjithshme, e njehsuar për katër vite është 12436,86 denarë, vlerë më e madhe prej asaj të njehsuar me llogarinë e kamatës së thjeshtë. ◆

Kamata e përbërë mund të njehsohet njëherë, dy herë ose më shumë herë gjatë vitit. Periudha në të cilën njehsohet kamata quhet **periudha e kapitalizimit** ose **periudhë e kamatizimit.** Nëse njehsimi i kamatës kryhet njëherë në vit dhe në fund të çdo viti i shtohet shuma, thuhet se kamatizimi, përkatësisht kapitalizimi është vjetore.Atëherë periudha e kapitalizimit është një vit. Nëse njehsimi i kamatës kryhet dyherë në vit, atëherë periudha e kamatizimit është gjashtë mujore ose një semestër, kurse kamatizimi është gjysmëvjetore ose semestrale. Ngjashëm, nëse njehsimi i kamatës kryhet katër herë në vit, e quajmë kuartale ose tremujore, kurse periudha e kamatizimit është tre muaj.

Katër madhësitë themelore të cilat paraqiten gjatë kamatës së thjeshtë janë:

- shuma fillestare (kapitali fillestar, kryesorja) K
- kamata e njehsuar i
- norma e kamatës (nëpërqindje) p, përndryshe e barabartë me kamatën për 100 denarë për njësi kohe
- koha për të cilën njehsohet kamata t, e shprehur në vite ose njësi më të vogla ose më të mëdhaja se viti.

Të njëjtat këto madhësi janë pjesë edhe të kamatës së përbërë, por mbi të gjitha këto, si element i parë i llogarisë së kamatës së përbërë, paraqitet edhe

• numri i kamatizimit gjatë një viti m , përkatësisht numri i periudhave në vit.
Kamatizimi, në praktikë, shënohet me shenjë të përkatëse të cilat tregojnë nëperiudhën e kamatizimit. Kështu, kamatizimi vjetor shënohet me *(a)*, gjysmëvjetore (semestrale) me (*s*), tremujore (kuatrale) me *(q)*, mujore me (m), ku norma e kamatës m[ë së shpeshti konstatohet në nivel vjetor.

Nëse norma e kamatës është dhënë si normë vjetore e kamatës, e njëjta shënohet me *p.a.*, nëse është dhënë si gjysmëvjetore, atëherë sjell shtim *p.s.*. Mund të jetë e dhënë në nivel të tremujores, pra e shënojmë me *p.q.* ose si kamatë mujore, pra sjell shtim *p.m.* Kështu norma e dhënë e kamatës, quhet **norma e kamatës nominale.** Norma e kamatës nominale është e barabartë në zmadhimin e njëqind njësive të parave të dhëna hua nëperiudhën kamatore që llogaritet për themelor.
Ndodh, periudha në të cilën është dhënë norma e kamatës të jetë e ndryshueshme prej periudhës në të cilën kryhet kamatizimi. Në këtë rast, është e nevojshme të kryhet barazimi, përkatësisht sjellja në normën e kamatës të periudhës së kamatizimit. Kështu norma e kamatës së fitura quhet **nolrma e kamatës relative.** Fitohet si pjesë e nominales. Kështu, nëse norma vjetore nominale është dhënë në nivel vjetor, kurse periudha e kamatizimit është gjashtë muaj, duke pasur parasysh janë gjysma prej një viti dhe norma e kamatës relative është një gjysmë e nominales. Nëse kamata nominale është vjetore, kuirse kamatizimi mujre, norma relative është një kamatizim është një dymbëdhjetëshe prej vjetores. Ngjashëm, për normën nominale që është semestrale, për kamatizim tremujor, norma relative është një gjysmë prej asaj që është dhënë, prandaj që tre muajt janë gjysma e gjashtë muajve. Nëse nominalja është tremujore, kurse kamatizimi vjetor, norma relative e cila i përgjigjet një viti është katër herë më e madhe prej asaj që është dhënë, pikërisht viti është katër herë më i gjatë se tremujore. Për krajhasim do të ilustrojmë me një tabelë të vlerave, për $m = 2$, $m = 1$, $m = 4$, $m = 12$ dhe të ngjajshëm.

Kamatizimi	Norma nominale	Norma relative
Semestral	8% *p.a.*	4% *p.s.*
Vjetore	8% *p.s*	16% *p.a.*
Tremujore	8% *p.a*	2% *p.q.*
Mujore	8% *p.a.*	0,667% *p.a.*
Dyvjetore	8% *p.s*	32%
Dymujore	8% *p.a.*	1,333%

Nëse kamatizimi kryhet në fund të çdo periudhe njehsuese, bëhet fjalë për **njehsim dekurziv të kamatës,** përkatësisht **kamatizimi dekurziv,** kurse norma e kamatës shënohet me *p.a.(d)*. Poashtu, baza për njehsimin e kamatës dekurzive është kapitali në fillim prej periudhës së kamatizimit.

Nëse kapitalizimi bëhet në fillim të çdo periudhe, baza për njehsim të kamatës anticipative është kapitali në fund të periudhës së kamatizimit, por themi se kamata anticipative është kapitali në fund të periudhës së kamatizimit, por themi se punohet për **kamatizimi anticipativ.** Norma e kamatës shënohet me *p.a.*(*a*).

Poashtu, nëse për dy norma të kamatës, njëra është dhënë dekurzive, kurse tjetra anticipative, dëshirojmë të vendosim cila është më e përshtatshme. Është e nevojshme t'i shprehim edhe të dyjat në të njëtën mënyrë.Poashtu, është e rëndësishme, të njëjtës shumë për një vit të njehsohet e njëjta kamatë, përkatësisht të fitohet sasi e njëjtë K_1. Led të jetë e njohur shuma themelore e cila kamatizohet *K* dhe normat e kamatës $\pi\%$*p.a.(a)* dhe *p%p.a.(d)*. Sipas përkufizimit për llojin e kamatizimit, për kamatizimin dekurziv, kmata e njehsuar i shtohet shumës themelore, pra në fund të vitit, fitojmë shumën $K_1 = K\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\frac{100+p}{100}$. Gjatë kamatizimit anticipativ, borxhliu merr për obligim prej më parë të paguan kamatë sipas normës së kamatës π për kapitalin *K*. Kjo do të thotë se në fillim të periudhës së parë, borxhliu nuk ngren sasinë K, por sasinë $K = K_1 - K_1\frac{\pi}{100} = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right)$, pasi kamata e njehsuar zbritet prej vlerës së fundit. Atëherë vlera fillestare e shumës është $K = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right) = K_1\frac{100-\pi}{100}$. Prej këtu $K_1 = K\frac{100}{100-\pi}$. Duke barazuar vlerat e fundit K_1, kemi $K\frac{100+p}{100} = K\frac{100}{100-\pi}$, përkatësisht $\frac{100+p}{100} = \frac{100}{100-\pi}$. Përfundimisht, nës e kemi të njohur normën e kamatës $\pi\%$*p.a.(a)*, atëherë norma e kamatës dekurzive përkatëse mund ta njehsojmë sipas formulës $p = \frac{100\pi}{100-\pi}$, por nëse është dihet norma e kamatës *p*% *p.a.(d),* norma e kamatës anticiative përkatëse njehsohet sipas formulës $\pi = \frac{100p}{100+p}$.

3. Banka jep hua me normë të kamatës 6% *p.a.(d)*, kurse banka konkurente me të me normë të kamatës 5,7% *p.a.(a)*. Cila bankë ofron kamatë më të volitshme?
Do t'i krahasojmë të dy normat e kamatave, por së pari të kryejmë shndërrimin e dekurzives së anticipative ose anasjelltas.

Nëse norma e kamatës dekurzive shndërrohet në normë anticipative, kemi $\pi = \frac{100p}{100+p} = \frac{100 \cdot 6}{100+6} = 5{,}66\%\, p.a.(a)$. Normalisht, bankë më e volitshme është banka e cila Njehson kamatë me notmë 5,7% *p.a.(a)*.

Për tu bindur, do ta kryejmë edhe transformimin e anasjelltë, do ta trransfotojmë normën e kamatës anticipative te norma dekurzive dhe atë $p = \frac{100\pi}{100-\pi} = \frac{100 \cdot 5{,}7}{100-5{,}7} = 6{,}04\%\, p.a.(d)$. Kuptohet, vërtretohet se është më e volitshme $5{,}7\%\, p.a.(a)$.♦

Detyra për punë të pavarur

1. Çfarë sasie të kamatës fitohet prej shumës 25000 denarë, ku norma e kamatizimit të thjeshtë prej 15% për kohën prej:

a) 5 vjet b) 3 muaj c) 25 ditë nga(30,360) dhe (*k*,365).

2. Sa vjet duhet të deponohet shuma themelore *K*, që për normë të kamatës së thjeshtë vjetore prej 5%, kamata e njehsuar është dhe shuma e deponuar? (Vërejtje. $K = I$)

3. Njehso normën e kamatës me të cilën për borxhin prej 34500 denarë, është njehsuar kamata e thjeshtë prej 6900 denarë, për 4 vjet?

4. Për cilën shumë të deponuar njehsohet kamata e thjeshtë prej 3540 denarë, me normën e kamatës prej 6% për:

a) 4 vjetë; b) 8 muaj.

5*. Në bankë janë deponuar dy shuma të ndryshme të cilat dallohen për 12000 denarë. Shuma më e madhe është deponuar për një vit, me 4% normë të kamatës, kurse shuma më e vogël në 10 muaj, ne 6% norma e kamatës. Njehso shumën e përgjithshme, nëse kamatat ethjeshta të njehsuara, për të dy shumat në veçanti janë të barabarta.

6. Për normën vjetore nominale 12% *p.a.*, caktoni:
a) normën gyjsmëvjetore të akamatës reale;
b) norma tremujore e kamatës relative;
c) norma mujore e kamatës relative.

7. Për normën e kamatës tremijore nominale 2% *p.q.*, cakto:
a) normën gyjsmëvjetore të akamatës relative;

b) normën gyjsmëvjetore të kamatës relative;
c) normën mujoreore të akamatës relative.

8. Norma e kamatës dekurzive prej 10% , shnërroi në dekurzive.

9. Norma e kamats dekuzive prej 10% , shnërroi në dekurzive.

10*. Cila normë e kamatës është më e përshtatshme, 6% *p.a.(a)* ose6,5% *p.a.(d)*.

7. 2. Njehsimi i vlerës së ardhshme të shumës

Gjatë njehsimit të kamatës së përbërë, përveç sasisë së kamatës, është e nevojshme të dihet edhe sasia e shumës së fillimit e zmdhuar për njehsimin e kamatës, në fund të kohës së kamatizimit, përkatësisht shuma e kamatizuar ose sasia e *i / i*. Poashtu, vlera e fundit të shumës, e zmadhuar për shumën e kamatës së përbërë, në fund të gjithë periudhës së kamatizimit, e quajmë **vlera e ardhshme e shumës.** Vlera fillestare e shumës e cila kamatizohet, *K*, quhet **vlera e tanishme e shumës.**

Për fillim do të shqyrtojmë shumën *K* e cila kamatizohet në mënyrë dekurzive. Le të jenë $K_1, K_2, ..., K_n$ shenjat për vlerat e kapiotallit në fund të të parës, të dytës e mëtutje përkatësisht, viti n të kamatizimit. Do të tregojm se të njëjtët formojnë varg gjeometrik. Do të shqyrtojmë sikurse ndryshon vlera e kapitallit sipas n vitet e kaluara, për të cilët kryhet kamatizimi vjetor në fund të çdo viti $(m = 1)$, me normë të kamatës dekurzive *p%p.a.(d)*. Të përkujtohemi, se çdo kamatë e njehsuar i shtohet kryesores dhe hyn në bazën për njehsimin e kamtës vijuese. Për vlerën e kapitallit pas periudhës, kemi: në fund të vitit të parë, në fund të vitit të dytë

$$K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right), \qquad \text{në fund të vitit të parë}$$

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \qquad \text{në fund të vitit të dytë}$$

----

dhe duke vazhduar në të njëjtën mënyrë për vitet e ardhshme, deri te i fundit në fund të vitit të parë $K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1} p}{100} = K_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, në fund të vitit të n

Në fund të shqwyrtojmë dy të veçuara, vledra të shumave të njëpasnjëshme, K_{s-1} dhe K_s, sipas asaj që është fituar paraprakisht, vlera e shumës në fund të vitit s do ta fitojmë si shumë të vlerës paraprake në fund të vitit të n

K_{s-1} dhe kamata e njehsuar për shumën $K_{s-1,}$ përkatësish:

$$K_s = K_{s-1} + K_{s-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{s-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Atëherë herësi ndërmjet çfarëdo dy shumave të njëpasnjëshme, përkatësisht shumat në fund të dy periudhave të njëpasnjëshme është:

$$\frac{K_s}{K_{s-1}} = 1 + \frac{p}{100}.$$

Është e qartë, $K, K_1, K_{2,\ldots,} K_n$ formojnë varg gjeometrik me herës $1 + \dfrac{p}{100}$ anëtari i parë i vargut K. Poashtu, për vlerën e fundit të kapitallit, për kushtet e lartëpërmendura fitohet:

$$\boxed{K_n = K(1 + \frac{p}{100})^n}.$$

Këtë formulë do ta zgjerojmë me parametrat të cilët e paraqesin numrin e periudhave të kamatizimit në një vit m, norma e kamatës në një periudhë, përkatësisht norma e kamatës relative $\dfrac{p}{m}$, ku p është norma e kamatës dekurzive vjetore, si edhe numri i përgjithshëm i periudhave të kamatizimit nm. Numri i përgjithshëm e kamatizimit është prodhim i numrit të viteve për të cilët njehsohet kamata, e shumëzuar me numrin e kamatizimit vjetor (mënyra e kamatizimit).

Gjatë këtyre kushteve, domethënë gjatë m periudhave në një vit, vlera e ardhshme e shumës është:

$$\boxed{K_n = K(1 + \frac{p}{100m})^{nm}}.$$

Faktori $r = 1 + \dfrac{p}{100m}$, quhet faktori dekurziv i kamatës. Nëse përfshihet faktori i kamatës te formula për vlerat e ardhshme të shumës, fitohet

$$\boxed{K_n = Kr^{nm}}.$$

Vërejtje 1. Për njehsim të zakonshëm të vlerës së ardhshme të shumës, ekzistojnë në mënyrë speciale tabela të punuara për interes në interes, të cilat mëtutje do t'i shënojmë me tabela *i/i*. Te ato, më së shpeshti madhësitë e përdorura, për vlerën konkrete të normës së kamatës tanimë janë njehsuar dhe prej atje mund të merren si të gatshme. Kështu, tabelat e para $i\ /\ i$ përmbajnë vlera për faktorin e kamatës, përkatësisht vlera e fundit të një njësie të parave e zmadhuar për faktorin e kamatës dekurzive dhe te ato vlera r^n shënohet me I^n_p, pra formula për njehsimin e vlerës së ardhshme të dhumës është:

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_p^n},$$

për kamatizimin që kryhet njëherë në vit, gjatë n viteve, me normë të kamatës *p% p.a.(d)*.
Kur kamatizimi kryhet shumë herë gjatë vitit. Formula e ka formën:

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm}},$$

Ku koha e kamatizimit shumëzohet me mlnyrën e kamatizimit, kurse norma e kamatës pjesëtohet me mënyrën e kamatizimit. Me m është shlnuar mënyra e kamatizimit, përkatësisht numri i periudhave të kamatizimit vjetore.

1. Në fund të çdo shume do të rritet sasia prej 25000 denarë për 20 vjet me normë të kamatës prej 8% *p.a.(d)*, nëse kamatizimi është vjetore, gjysmëvjetore dhe tremujore.

Prej të dhënave te detyra $K = 25000, n = 20, p = 8\% p.a.(d)$.

a) Kamatizimi është v jetor, përkatësisht $m = 1$. Faktori i kamatës dekurzive është $r = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$.

Kapitali i pritur do të jetë $K_{20} = Kr^{20} = 25000 \cdot 1{,}08^{20} = 116523{,}93$ denarë.

b) Le të jetë $m = 2$, përkatësisht njehsimi i kamatës kryhet dy herë në vit. Faktori dekurziv është $r = 1 + \frac{8}{100 \cdot 2} = 1{,}04$, kurse kapitali bëhet $K_{20} = Kr^{40} = 25000 \cdot 1{,}04^{40} = 120025{,}52$ denarë, që është një lloj zmadhim në lidhje me vetëm një kamatizim.

c) Le të jetë $m = 4$, ku kapitalizimi kryhet në çdo tremuaj, përkatësisht katër herë në vit. Faktori dekurziv është $r = 1 + \frac{8}{100 \cdot 4} = 1{,}02$, kurse kapitali bëhet $K_{20} = Kr^{80} = 25000 \cdot 1{,}02^{80} = 121885{,}98$ denarë. ◆

Me rritjen e numrit të kamatizimit te njehsimi dekurziv i kamatës së përbërë, zmadhohet edhe vlera e fundit e kapitalit. Pikërisht sa më shpesh kamatizojmë, po aq më shpesh dh shtuarja e kamatës së përbërë, përkatësisht aq më shumë zmadhohet vlera e shprehjes r^{m}, por me të edhe vlera e ardhshme e shumës.

Për shkak të mundësisë së normës së kamatës nominale të jepet edhe periudhë e shkurtër prej një viti, të vërejmë çka bëhet me normën e kamatës vjetore, e cila në këtë rast luan rol të normës së kamatës relative. Nëse $p = 8\%$ *p.s.(d)*, norma vjetore relative është 16% , duke pasur parasysh se norma e dhënë vlen vetëm për semestër përkatësisht gjysmëviti. Nëse $p = 8\%$*p.q.(d)* është norma kuartale nominale, vjetorja relative është 32% .

2. Në cilën shumë do të rritet kapitali fillestar prej 25000 denarë, për 5 vjet, me normë të kamatës $p = 8\%$ *p.m.(d)*, nëse kamatizimi është kuartle.

Së pari duhet të njehsohet norma e kamatës vjetore nominale, e cila është $8 \cdot 12 = 96\%$ vjetore, por duke pasur parasysh se kamatizohet kuartale, për vetëm një normë të kamatës tremujore është $\frac{96}{4} = 24\%$. Vlera e njëjtë fitohet nëse mendojmë sa herë në një muaj paraqutet në një tremujor dhe pasi kuartali përbëhet prej 3 muajve, mjafton të tregojmë se norma e kamatës relative e një kuartali është $3 \cdot 8 = 24\%$. Numri i përgjithshëm i kamatizimit është $nm = 5 \cdot 4 = 20$. Për vlerën e ardhshme të shumës vlen

$$K_5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{12 \cdot 8}{4 \cdot 100}\right)^{5 \cdot 4} = 25000 \cdot \left(1 + \frac{24}{100}\right)^{20} = 25000 \cdot 1{,}24^{20} = 25000 \cdot 73{,}864 .$$

Domethënë vlera e ardhshme është $K_5 = 1846603{,}74$ denarë. ◆

Shembulli vijues do të tregon si është ndryshimi në vlerën e ardhshme të shumës së deponuar, kur shfrytëzojmë vetëm llogari të kamatës së përbërë dhe metoda e kombinua në kamatizimin e thjeshtë dhe të përbërë.

3. Në 15.09 kemi deponuar 18000 denarë. Me cilën shumë do të disponojmë në 28.07 te viti i dhjetë (duke llogaritur prej ditës së deponimit), nëse kamatizimi bëhet kuartale, në 30.09,30.12, 30.03 dhe 30.06 gjatë çdo viti, kurse norma e kamatës është $p = 6\%$ *p.s.(d),* me kusht koha të njehsohet sipas matricës (30,360).

Do të shkruajmë se shuma fillestare është $K = 18000$, kamatizimi është kuartal, përkatësisht $m = 4$, norma e kamatës është $p = 6\%$*p.s.(d)*, kurse norma e kamatës vjetore relative është 12% *p.a.(d)*.

Faktori i kamatës përkatëse është $r = 1 + \frac{2p}{100m} = 1 + \frac{6 \cdot 2}{100 \cdot 4} = 1{,}03$.

Ngel saktë të njehsojmë sa kohë rrjedh kamatizimi. Prej ditës së deponimit 15.09 deri në datën e kamatizimit të parë 30.09 ka vetëm 15 ditë. Nëse të njëjtët i shndërrojmë në vite, pra matrica e dhënë për kohën ato janë $t' = \frac{15}{360}$ vite. Më tutje, deri në fund të vitit të parë ka një periudhë llogaritëse të plotë deri në 30.12. prej fillimit të vitit të dytë deri në fund të vitit të nëntë ka gjithsej 8 vjet, përkatësisht 32 periudha llogaritëse, në pajtim me këtë edhe 32 kapitalizimi. Gjatë vitit të dhjetë ka 2 periudha të plota të kamatizimit deri 30.06 dhe edhe 28 ditë deri në ditën në të cilën do të duhej të nxirren mjetet. Domethënë ka gjithsej 35 periudha të plota të kapitalizimit sikurse dhe $t = 15$ ditë $\frac{15}{360}$ vjet, prej vitit të parë sipa deponimit dhe $t'' = 28$ ditë $= \frac{28}{360}$ vite, prej vitit të fundit.

Nëse vlerën e fundit të kapitalit e njehsojmë vetëm duke shfrytëzuar kamatizimin e përbërë atëherë kohën do ta shndërrojmë në periudha të plota të kapitalizimit dhe pjesa tjetër në vite, prej ku:

$$K_n = Kr^{35} \cdot r^{t'm} \cdot r^{t''m} = 18000 \cdot 1{,}03^{35} \cdot 1{,}03^{\frac{15}{360}4} \cdot 1{,}03^{\frac{28}{360}4} = 51369{,}9 \text{ denarë.}$$

Nëse kohjën e shndërrojmë në vite të plota për periudha të plota kemi $\frac{35 \cdot 90}{360}$ vite, duke pasur. Parasysh se periudhat e plota janë kuartale prej nga 3 muaj, përkatësisht prej nga 90 ditë. Atëherë $K_n = 18000 \cdot 1{,}03^{\frac{3193}{360}4} = 51369{,}9$ denarë.

Nëse shfrytëzojmë metodë të kombinuar të normës së kamatës së thjeshtë dhe të përbërë, ku norma e kamatës së thjeshtë e përdorim vetëm te pjesët jo të plota prej periudhës së përgjithshme të kamatizimit, kemi:

$$K_n = K(1 + \frac{p}{100}t') \cdot r^{35} \cdot (1 + \frac{p}{100}t''),$$

Ku duke shkruar në mënyrë të njëpasnjëshme e kamatizojmë, së pari për 15 ditë prej vitit të parë, pas 35 periudha të plota dhe në fund 28 ditë prej vitit të fundit

Kemi $K_n = 18000 \cdot (1 + \frac{12}{100}\frac{15}{360}) \cdot 1{,}03^{35} \cdot (1 + \frac{12}{100}\frac{28}{360}) = 51377{,}86$ denarë. ◆

Nëse kombinojmë llogari të kamatës së përbërë dhe të thjeshtë, vlera e ardhshme e fituar të shumës dallohet prej asaj për të cilën llogaria është përdorimi i llogarisë së kamatës së përbërë, ku shuma prej metodës së kombinuar është pak më e madhe.

Ndryshimi themelor ndërmjet kamatizimit dekurziv dhe kamatizimit anticipativ sikurse treguam qysh te hyrja, përbëhet në kohën e njehsimit të kamatës. Te kamatizimi dekurziv kamatizimi njehsimi i kamatës kryhet në fund të periudhës llogaritëse. Ndërsa te njehsimi anticiativ i kamatës kryhet në fund të periudhës llogaritëse në fillim të çdo periudhe llogaritëse.

Gjatë kamatizimit anticipativ, borxhliu merr obligim prej më parë të paguan kamatë sipas normës së kamatës sipas normës së kamatës $\bar{u}$ për kapitalin K. Le të jetë $K_1, K_2, \ldots, K_n$ janë simbole për vlerat e kapitalit në fund të vitit të parë, të dytë dhe mëtutje përkatësisht, viti $\bar{u}$ i kamatizimit. Në fillim të periudhës së parë, borxhliu nuk nxjerrë sasinë K, por sasinë

$K = K_1 - K_1 \frac{\pi}{100} = K_1\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) = K_1 \frac{100 - \pi}{100}$. Atëherë, në fund të vitit të parë, gjatë kamatizimit vjetor ($m = 1$), obligimi i borxhliut është

$$K_1 = \frac{K}{1 - \frac{\pi}{100}} = K\frac{100}{100 - \pi}.$$

Në fund të vitit të dytë, pasi njehsojmë kamatën e përbërë, baza për kamatizimin është paraprakisht vlera e kamatizimit, përkatësisht tani $K\frac{100}{100-\pi}$. Domethënë, në fund të vitit të dytë,obligimet janë:

$$K_2 = K_1\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^2.$$

Duke vazhduar në të njëjtën mënyrë, për çdo vit të ardhshëm, arrijmë deri te viti i fundit n, të kamatizimit, kur vlera e ardhshme e shumës është:

$$K_n = K_{n-1}\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^n.$$

Vlerat e fundit të kapitalit K, K_1, K_2,... gjatë kamatizimit anticipativ, formojnë varg gjeometrik me herës $\rho = \frac{100}{100-\pi}$. Nëse K_n është sasia e kapitalit për periudhën n, atëherë vlen $K_n = K_{n-1}p$, përkatësisht vlera e kapitalit K për n vite, gjatë kamatizimit vjetor anticipativ bëhet

$$\boxed{K_n = K\rho^n}.$$

Faktori $\rho = \frac{1}{1-\frac{\pi}{100}} = \frac{100}{100-\pi}$ quhet faktori i kamatës anticipative.

Nëse formulat e fituara i zgjerojmë me parametra të cilat i paraqesin numrin e periudhave të kamatizimit në një vit m, norma e kamatës në një periudhë, përkatësisht norma e kamatës relative $\frac{\pi}{m}$, ku π është anticipimi vjetor norma e kamatës, si edhe numri i përgjithshëm i periudhave të kamatizimit nm, atëherë vlera e ardhshme e shumës është:

$$K_n = K\left(\frac{100}{100-\frac{\pi}{m}}\right)^{nm} = K\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right)^{nm}.$$

Nëse përfshihet faktori i kamatës anticipative te formula për vlerën e ardhshme të shumës, kemi:

$$\boxed{K_n = K\rho^{nm}},$$

ku $\rho = \frac{100m}{100m-\pi}$.

Vërejtje 2. Te tabelat *i/i,* ngjashëm sikurse te kamatizimi dekurziv, vlera ρ^n shënohet me $\mathbf{I}_{\pi}^{n}$, pra për formulën për njehsimin e vlerës së ardhshme të shumës fitohet:

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\pi}^{n}},$$

për kamatizimin e cila kryhet njherë në vit.
Përkatësisht, nëse kamatizimi kryhet shumë herë në vit, formula merr formën:

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}},$$

ku koha shumëzohet, kurse norma e kamatës pjesëtohet me mlnyrën e kamatizimit.

Formulat e fundit të cilat i fitojmë kanë formë të njëjtë sikurse edhe gjatë kamatizimit dekurziv, por për shkak të faktorëve të ndryshëm, sasit e fundit janë të ndryshme.

4. Në çfarë shume do të rritet sasia prej 25000 denarë për 20 vjet me normë të kamatës së zvogëluar prej 8% *p.a.(a)*, nëse kamatizimi është vjetor, gjysmëvjetore dhe tremujore.

Prej të dhënave të detyrës kemi $K = 25000$, $\bar{u} = 20$, $p = 8\%$ *p.a.(a)*.

a) Le të jetë numri i kamatizimit vjetor $m = 1$. Për fillimin e njehsimit të faktorit të kamatës anticipative $\rho = \dfrac{100}{100-8} = 1{,}08696$.
Sasia e kamatizimit është $K_{20} = Kp^{20} = 25000 \cdot 1{,}08696^{20} = 132498{,}59$ denarë.

b) Le të jetë $m = 2$, përkatësisht njehsimi i kamatës kryhet dy herë në vit. Faktori anticipativ është $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{200}{192} = 1{,}04166667$, kurse kapitali bëhet $K_{20} = \mathrm{K}p^{40} = 25000 \cdot 1{,}04166667^{40}$ $= 127964{,}85$ denarë, që është një lloj zvogëlim në lidhje vetëm të një kamatizim.

c) Le të jetë $m = 4$, ku kapitalizimi kryhet në tre muaj. Faktori anticipativ është
$\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{400}{392} = 1{,}020408$, kurse kapitali bëhet:

$K_{20} = \mathrm{K}p^{80} = 25000 \cdot 1{,}020408^{80} = 125848{,}6$ denarë. ◆

Me zmadhimin e numrit të kamatizimit, te njehsimi anticipativ i kamatës së përbërë, zvogëlohet vlera e fundit e kapitalit.

Nëse i krahjasojmë vlerat e ardhshme të shumave të cilat marrin gjatë kamatizimit dekurziv dhe anticipativ, gjatë kushteve të njëjta, vetëm mënyra të ndryshme të njehsimit të kamatës, kamatizimi anticipativ jep vlerë më të madhe prej dekurzives. Gjatë kreditit të huazuar, për kreditorët më përkatëse ështëkamatizimi anticipativ, kurse borxhliu dekurziv.

5. Para 2 vjet dhe 6 ммuaj kemi deponuar 60000 denarë, por pas një viti e 3 muaj duhet të nxirren 45000 denarë. Me cilën shumë do të disponojmë 3 vjet prej sot, nëse norma e kamatës është 6% *p.a(d)*, kurse kamatizimi është tremujor? Sa është shuma gjatë kushteve të njëjta, por me kamatizimin anticipativ?

Për çdo shumë në veçanti do ta njehsojmë vlerën e ardhshme dhe atë, për shumën e deponuar kamatizojmë gjithsej 5,5 vjet, kurse për shumën e nxjerrur kamtizojmë për periudhën prej një viti dhe 3 muaj deri në 3 vjet, por gjithsej 1 vit dhe 9 muaj, përkatësisht 21 muaj (fig. 1).

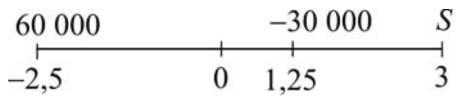


Fig. 1

Kështu, duke shfrytëzuar faktorin dekurziv $r = 1 + \dfrac{6}{4 \cdot 100} = 1{,}015$, për shumën me të cilën do të disponojmë pas 3 vjet, kemi:

$$S = 60000 \cdot r^{5{,}5 \cdot 4} - 45000 \cdot r^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015^{22} - 45000 \cdot 1{,}015^{7} = 33310{,}8 \text{ denarë.}$$

Në lidhje me kamatizimin anticipativ, fakroti i kamatës është $\rho = \dfrac{100}{100 - \dfrac{6}{4}} = \dfrac{400}{400 - 6} = 1{,}015228$. Atëherë vlera e ardhshme e shumës do të jetë

$$S = 60000 \cdot \rho^{5{,}5 \cdot 4} - 45000 \cdot \rho^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015228^{22} - 45000 \cdot 1{,}015228^{7},$$ përkatësisht

$S = 33644{,}62$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarurt

1. Para 18 vjet, 8 muaj dhe 20 ditë, kemi deponuar 20000 denarë me normë të kamatës 8% *p.a.(d)* me kamatë:

a) vjetore; b) tremujore.

Me cilën shumë do të disponojmë sot? Njehsimet kryej vetëm me kamatën e përbërë dhe me metodën e kombinuar të llogarisë së kamatës së thjeshtë dhe të përbërë.

2. Në cilën shumë do të rritet prej 9000 denarë, nëse pesë vitet e para deponohet me 6% *p.a.(d)* dhe kamatizim gjysmëvjetori, pastaj katër vjet me kamatë vjetore 8% *p.q.(d)* kamatizim mujor dhe dy vitet e fundit, me normë 7% *p.s.(d)* dhe kamatizimi tremujor?

3*. Në cilën shumë do të rritet sasia prej 9000 denarë, nëse pesë vitet e para deponohen me 6% *p.a.(a)* dhe kamatizim gjysmëvjetori, pastaj katër vjet me 8% *p.q.(a)* kamatizim mujor dhe dy vitet e fundit, me normë 7% *p.s.(a)* dhe kamatizim tremuajor?

4. Para 2 vjet dhe 3 muaj janë deponuar 40000 denarë, kurse sot deponohen edhe 24000 denarë. Sa është vlera e ardhshme e mjeteve të deponuara në fund të vitit të katërt prej sot, nëse norma e kamatës është 5% *p.a.(d)* me kamatizim gjysmëvjetor?

5*. Sot deponojmë 30000 denarë, pas tre vjet të nxjerrim 12000 denarë, por pas pesë vjet, do të deponojmë edhe 20000 denarë. Me cilën shumë do të disponojmë tetë vjet prej tani, nëse norma e kamatës është 6% *p.a.(d)*, me kamatizim tremujor? Krahasoe shumën e fituar me shumën që fitohet kur shfrytëzohet 6% *p.a.(a)* me kamatizimin e njëjtë.

6*. Para katër vjet, në bankë janë deponuar 30000 denarë, sot deponojmë 9000 denarë, por pas dy vjet duhet të nxjerrim 36000 denarë. Për deponimet njehsohet norma e kamatës 6% *p.a.(d)*, me kamatizim gjysmëvjetori. Njehso me çfarë kamate do të disponojmë për tetë vjet prej sot.

7*. Para 15 vjet, në bankë janë deponuar 7000 denarë, para 9 vjet edhe 4000 denarë, por para 5 vjet prej llogarisë janë nxjerrë 5000 denarë. Me çfarë shume disponojmë sot, nëse kamatizimi është tremujore me normë të kamatës 5% *p.a.(d)*.

7. 3. Norma e kamatës konforme

Prej shkaqeve praktike, kur bëhet fjalë për kamatizimin dekurziv, paraqitet nevoja prej llojit tjetër të normës së kamatës, e ndryshueshme prej atyreve për të cilat deri më tani i përmendëm. Pikërisht fakti se gjatë zmadhimit të numrit të kamatizimit gjatë vitit, te kamatizimi dekurziv, zmadhohet edhe vlera e kapitallit, si pasojë e zmadhimit të kamatës, mund të sjelle deri te disa moskuptime. Duke shfrytëzuar normën e kamatës relative, arrihet njehsimi i kamatës të kryhet jo vetëm te kryesorja por edhe te kryesorja por edhe te kamata. Atëherë paraqitet dallimi në vlerën e ardhshme të njehsuar të shumës gjatë një kamatizimi vjetor dhe gjatë shumë kamatizimeve gjatë vitit. Nëse dëshirojmë këtë ndryshim ta tejkalojmë, në vend të normës së kamatës relative shfrytëzohet e ashtquajtura **norma e kamatës konforme,** norma e cila përveç zmadhimit të numrit të kapitalizimit gjatë një viti, jep sasi të njëjta të kamatave si edhe norma e kamatës vjetore me një kapitalizim. Normën e kamatës konforme do ta shënojmë me $p_{k,m}$. **Norma e kamatës konforme,** e cila me m kamatizon gjatë një viti jep sasi të barabarta si edhe norma p me një kamatizim vjetor, fitohet barazimi i këtyre dy formulave:

$$K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = K\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

përkatësisht $\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = \left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Prej këtu, për normën konforme kemi:

$$\boxed{p_{k,m} = 100\cdot\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right)}.$$

Norma e kamatës së fituar konforme gjithmonë është më e vogël se norma e kamatës relative.

1. Sa është norma e kamatës tremujore konforme nëse norma e kamatës vjetore është p = 12% *p.a.(d)*? Krahasoe normën e fituar me relativen dhe krahasoi vlerat e ardhshme të kapitalit prej 10000 denarë, të cilat fitohen me zbatimin e dy normave për kohën prej një viti.

Numri i kamatizimit është $m = 4$. Drejtpërdrejt formula e fituar kemi $p_{k,4} = 100\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{12}{100}}-1\right) = 2{,}87\%$. Nga ana tjetër, norma e kamatës relative e cila i përgjigjet një tremujori është $\frac{12}{4} = 3\%$, domethënë më e madhe se norma konforme.

Duke e zbatuar normën konforme, vlera e ardhshme e shumës $K_1 = 10000\cdot\left(1+\frac{2{,}87}{100}\right)^4 = 11198{,}37$ denarë, por me shfrytëzimin e normës relative $K_1' = 10000\cdot\left(1+\frac{12}{4\cdot 100}\right)^4 = 11255$ denarë. ◆

2. Në cilën shumë do të rritet sasia prej 25000 denarë për 20 vjet me normë të kamatës nominale prej 8% *p.a.(d),* nëse kamatizimi është gjysmëvjetore dhe tremujore, duke shfrytëzuar nrmën e kamatës konforme.

a) Le të jetëa $m = 2$. Norma konforme e cila u përgjigjet dy kamatizimeve vjetore është $p_{k,m} = 100\left(\sqrt{1+\frac{8}{100}}-1\right) = 3{,}923\%$. Për vlerën e ardhshme të kapitalit fitohet $K_{20} = K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^{40} = 25000\cdot 1{,}03923^{40} = 116521{,}755$. Vlera e kapitalit kështu të fituar prej vlerës së njehsuar të normës së kamatës relative, por gati e barabartë me vlerën e kapitalit me një kamatizim

Kështu, $K_{20}' = 25000 \cdot \left(1 + \frac{8}{2 \cdot 100}\right)^{40} = 120025{,}52$ denarë fitohen duke shfrytëzuar normë e kamatës relative, ndërsa me një kamatizim vjetor kemi

$$K_{20}'' = 25000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{20} = 116523{,}93 \text{ denarë.}$$

b) Le të jetë $m = 4$. Norma konforme është $p_{k,m} = 100\left(\sqrt[4]{1 + \frac{8}{100}} - 1\right) = 1{,}943\%$. Norma e ardhshme e kamatës është $K_{20} = K\left(1 + \frac{p_{k,m}}{100}\right)^{20 \cdot 4} = 25000 \cdot 1{,}01943^{80} = 116555{,}51$ denarë. Duke shfrytëzuar normën kamatën relative kemi $K_{20}' = K\left(1 + \frac{8}{4 \cdot 100}\right)^{80} = 25000 \cdot 1{,}02^{80} = 121885{,}98$ denarë, por me një kamatizim vjetore njëjtë sikurse paraprakja, $K_{20}'' = 2116523{,}93$ denarë. ◆

Shmangëjet të cilat paraqiten në lidhje me vlerën e kapitalit të njehsuar, me një kamatizim vjetor është rezultat u rrumbullakimit të cilën e bëjmë gjatë njehsimit të normës së kamatës konforme.

Detyra për punë të pavarur

1. Nëse sot deponojmë 28000 denarë me normë të kamatës 2%*p.q.(d)*, atëherë me cilën shumë do të disponojmë pas 2 vjet dhe 9 muaj, gjatë kamatizimit gjysmëvjetor? Të zbatohjet norma e kamatës konforme.

2. Sot deponojmë 10000 denarë, por pas dy vjet duhet të nxjerrim 7500 denarë. Me çfarë shume do të disponojmë tëre vjet prej tani, nëse norma e kamatës është 9% *p.s(d)*, me kamatizim tremujor. Të zbatohet norma e kamatës konforme.

3. Në cilën shumë do të rriten 20000 denarë, për kohën prej 10 vjet, me normë të kamatës 8% *p.a.(d)*, nëse kamatizimi është tremujore me

a) norma e kamatës relative; b) norma e kamatës konfrome.

4. Normën tremujore konforme prej 1,467% , shndërroje në normë të kamatës vjetore.

5. Nëse norma e kamatës është 8% *p.a.(d)*, njehso normën e kamatës konforme gjysmëvjetore dhe tremujore.

6*. Para 15 vjet në bankë janë deponuar 7000 denarë, para 9 vjetë edhe 4000 denarë , por para 5 vjet prej llogarisë janë nxjerrë 5000 denarë. Me çfarë shume disponon sot, nëse norma e kamatizimit është tremujore 5% *p.a.(d)*. Të njehsohet sasia e normës së kamatës.

7. 4. Njehsimi i vlerës fillestare të shumës dhe kamata e njehsuar

Ekzistojnë situata reale në të cilat e dim sa mjete na duhen pas një periudhe të kohës, gjatë kushtzeve të njohura për kamatizim, por atë që e dim dhe duhet ta njehsojmë, është sa duhet të deponojmë. Në realitet në bazë të sasisë së njohur të shumës së kamatizuar K_n, ta njehsojmë shumën fillestare K, përkatësisht kapitalin fillestar, nëse e dim normën e kamatës përkatëse, numrin e viteve të kamatizimit m dhe kohën për të cilën kamatizohet n. Me transformimin e barazimeve të njohura për vlerën e ardhshme të shumës, i fitojmë këto formula për kapitalin fillestar

$$K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1+\frac{p}{100m})^{nm}},$$ gjatë kamatizimit dekurziv, si edhe

$$K = K_n \rho^{-nm} = K_n\left(1-\frac{\pi}{100m}\right)^{nm},$$ gjatë kamatizimin anticipativ.

Mënyra e përcaktimit të vlerës fillestare të shumës, quhet **diskontim,** përkatësisht përcaktimi i vlerës fillestare të shumës. Vlera reciproke e faktorëve të kamatave, r^{nm} dhe ρ^{-nm} , quhen **faktorë të diskontit.**

Vërejtje 1. Është e rëndësishme që ndodh kur shfrytëzohen tabelat *i/i.* Pikërisht, për vlerat I_p^n dhe I_π^n, të cilat u përgjigjen faktorët e kamatës gjatë kamatizimit dekurziv dhe anticipativ, përkatësisht, përkufizohen edhe faktorët e diskontit $\mathrm{II}_p^n = \frac{1}{\mathrm{I}_p^n} = r^{-n}$ dhe $\mathrm{II}_\pi^n = \frac{1}{\mathrm{I}_\pi^n} = \rho^{-n}$, vlera të cilat lexohen prej tabelat e dyta. Tabelat e dyta paraqesin vlera reciproke të tabelave të para. Atëherë formulat për njehsimin e vlerës fillestare kanë formën

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_p^n},$$

Për kamatizimin dekurziv dhe

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_\pi^n},$$

gjatë kamatizimit anticipativ vjetor.

Kuptohet, kur kamatizojmë shumë here në vit, koha shumëzohet, kurse shuma e kamatës pjestohet me mënyrën e kamatizimit, pra shuma fillestare njehsohet sipas formulave $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_{\frac{p}{m}}^{nm}}$, gjatë kamatizimit dekurziv $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}}$, dhe anticipativ.

1. Sa duhet të depon ojmë, nëse me normën e kamatës 6% *p.a.(d)* dhe kamatizimi vjetor, dëshirojmë të kursejmë 68000 denarë, për katër vite?

Është e qartë, $m = 4$, $K_4 = 68000$, $p = 6\%$ *p.a.(d)*. Ta njehsojmë faktorib e kamatës, por prej atij dhe faktori të diskontit. Pikërisht, $r = 1 + \dfrac{6}{100} = 1{,}06$. Faktori përkatës i diskontit është $\dfrac{1}{r} = 0{,}9434$. Atëherë, kapitali fillestar është $K = \dfrac{68000}{1{,}06^4} = 68000 \cdot 0{,}9434^4 = 53862{,}3$ denarë. ◆

2. Cila sasi, e kamatizimit gjatë katër viteve, me normën e kamatës 8% *p.a.(d)* dhe kamatizimin

a) gjysmëvjetor; b) tremujor, do të na sjell

shumë prej 10000 denarë?

Vlera e fundit e shumës është $K_4 = 10000$. Do t'i shqyrtojmë të dy rastet:

a) $m = 2, r = 1 + \dfrac{8}{200} = 1{,}04$, pra $K = 10000 \cdot 1{,}04^{-4 \cdot 2} = 7306{,}9$ denarë;

b) $m = 4, r = 1 + \dfrac{8}{400} = 1{,}02$, pra prej këtu $K = 10000 \cdot 1{,}02^{-4 \cdot 4} = 7284{,}46$ denarë. ◆

3. Para gjashtë vjet kemi kthye borxhin prej 27000 denarë, por pas dhjetë vjet kemi për të kthye borxh prej 36000 denarë. Me cilën shumë do të mund ta paguajmë tërësisht borxhin sot, në rastin të mos kemi qenë në mundësi ta kthejmë borxhin e vjetër, nëse norma e kamatës është nën kushtet e njëjta norma e kamatës është 4% *p.a.(d)*, kurse me kamatizim gjysmëvjetor? Çfarë shume është e nevojshme nëse kamatizimi është nën kushtet e njëjta, por me normën e kamatës anticipative?

Nëse nuk jemi në gjendje ta kthejmë borxhin, vlera e tij deri më sot është zmadhuar dhe atë në sasinë e kamatizimit për 12 periudha, me normën e kamatës relative 2% *p.s.(d)*. Domethënë borxhi i pa kthyer sot do të jetë

$27000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{200}\right)^{12} = 27000 \cdot 1{,}02^{12}$. Njëkohësisht, borxhin e dytë do ta kthejmë para kohe, pra vlera e tij do të diskontohet për dhjetë vjet pas dhe do të jetë

$36000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{200}\right)^{-20} = 36000 \cdot 1{,}02^{-20}$ (fig. 2).

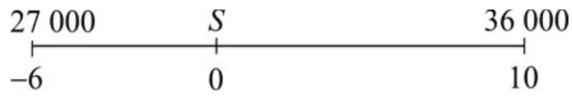


Fig. 2

Borxhi i përgjithshëm është shuma prej të dy vlerave të njehsuara, pra shuma e nevojshme është

$S = 27000 \bullet 1{,}02^{12} + 36000 \bullet 1{,}02^{-20} = 58469{,}5$ denarë.

Në rastin e normës anticipative, faktori i kamatës është

$\rho = \dfrac{100}{100-2} = 1{,}020408$. Shuma e nevojshme do të jetë:

$S = 27000 \cdot 1{,}020408^{12} + 36000 \bullet 1{,}020408^{-20} = 88330{,}94$ denarë. ◆

Edhe një pyetje e cila parashtrohet është pyetja sa është kamata e njehsuar për mjetet e deponuara në bankë ose për borxhin i cili duhet të kthehet. Duke ditur vlerat e kapitalit fillestar dhe shumën e fundit të kapitallit, kamata e njehsuar nuk është asgjë tjetër por ndryshimi i vlerës së mbarimit dhe të fillimit të shumës.Nëse kamata e njehsuar në fund të periudhës n të kamatizimit e shënojmë me $I_{n,}$ atëherë e njëjta mund të njehsohet sipas formulës $I_n = K_n - K$, pa dallim të mënyrës së kamatizimit.

Më konkretisht, në rastin e kamatizimit dekurziv me normë të kamatës p , me m periudha të kamatizimit vjetor, kamata e njehsuar është:

$I_n = K_n - K = Kr^{nm} - K = K(r^{nm} - 1)$,

ku r është faktori i kamatës dekurzive.

Në rastin e kamatizimit anticipativ, me normë të kamatës $\bar{u}$ dhe m periudha të kamatizimit vjetor, për kamatën e njehsuar kemi:

$I_n = K_n - K = Kp^{nm} - K = K(p^{nm} - 1)$,

për p faktori i kamatës anticipative.

Shumë lehtë, të njëjtat formula mund të shkruhen edhe nëse është i njohur vetëm vlera e fundit e shumës. Atëherë,

$I_n = K_n - K = K_n - K_n r^{-nm} = K\left(1 - r^{-nm}\right)$,

ku njehsimi dekurziv dhe përkatësisht gjatë kamatizimit anticipativ:

$I_n = K_n - K = K_n - K_n \rho^{-nm} = K\left(1 - \rho^{-nm}\right)$.

Vërejtje 2. Nëse i shfrytëzojmë tabelat *i/i*, formulat bëhen $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm} - 1\right)$, për rastin dekurziv dhe $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}_{\frac{\pi}{m}}^{nm} - 1\right)$, për rastin anticipativ. Kur do ta shfrytëzojmë vlerën e fundit të shumës, formulat mund t'i shkruajmë në formën $I_n = K_n\left(1 - \mathrm{II}_{\frac{p}{m}}^{nm}\right)$, përkatësisht $I_n = K_n\left(1 - \mathrm{II}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}\right)$.

4. Para 30 vjet, janë deponuar 10000 denarë me normë të kamatës 6% *p.a.*, me kamatizim gjysmëvjetor. Sa është kamata e përbërë e njehsuaer deri më tani, nëse kamatizimi është:

a) dekurzive; b) anticipative?

Është e njohur vlera fillestare e shumës $K = 10000$, norma e kamatës relative 3%, si edhe numrin e kamatizimit gjatë një viti $m = 2$. Atë herë numri i përgjithshëm i kamatizimit është 60 .

a) Për faktorin e kamatës dekurzive kemi $r = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$. Kamata e njehsuar është $I_{30} = K_{30} - K = 10000 \bullet (1{,}03^{60} - 1) = 48196$ denarë.

b) Faktori i kamatës anticipative është $\rho = \frac{100}{100-3} = 1{,}03093$, kurse kamata e njehsuar është $I_{30} = K_{30} - K = 10000 \bullet (1{,}03093^{60} - 1) = 52194{,}3$ denarë.

Detyra e fundit është edhe një vërtetim se kamatizimi anticipativ është i kënaqshëm për kreditorët, por e pakënaqshme për shfrytëzuesët në huazim. ◆

5. Sot është deponuar shuma, e cila për një vit dhe gjashtë muaj me kamatën e njehsuar është rritur në 36000 denarë. Sa është kamata e njehsuar, nëse norma e kamatës është 8% *p.a.* me kamatizim tremujor e cila është:

a) dekurzive; b) anticipative?

E dim se vlera e fundit të shumës është $K_{15} = 36000$, $m = 4$, por kamatizohet gjithsej 6 herë.

a) Faktori dekurziv i diskontit është $\frac{1}{r} = \frac{1}{1{,}02} = 0{,}9804$, kurse kamata e njehsuar në këtë rast është $I_{1,5} = K_{1,5}\left(1 - \frac{1}{r^6}\right) = 36000 \cdot \left(1 - 0{,}9804^6\right) = 4031{,}5$ denarë.

b) Faktori anticipativ i diskontit është $\frac{1}{\rho} = \frac{100-2}{100} = 0{,}98$, kurse kamata e njehsuar

$I_{1,5} = K_{1,5}\left(1 - \rho^{-6}\right) = 36000 \cdot \left(1 - 0{,}98^6\right) = 4109{,}67$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Sa është sasia të cilën e kemi deponuar në bankë para 20 vjet, nëse sot kemi 250000 denarë, ku gjatë tërë periudhës së kamatizimit ka qenë tremujore me normën e kamatës:

a) $p = 6\% p.a.(d)$; b) $\pi = 6\% p.a.(a)$.

2. Personi duhet të paguan 16000 pas dy vjet, 24000 denarë pas pesë vjet dhe 18000 denarë pas tetë vjet. Me cilën shumë personi do ta paguan borxhin sot, nëse norma e kamatës është 6% *p.a.*, me kamatizim të gjysmëvitit, në rastin e kamatizimit:

a) dekurziv; b) anticipativ?

3. Personi para 38 viteve të datëlindjes, me rrezik ka investuar 50000 denarë me normën e kamatës 48% *p.a.(d)* dhe kamatizim mujor. Sa është kamata e njehsuar për mjetet e deponuara më saktë për një vit?

4*. Personi investon 50000 denarë, por pas dy vjet tërheq 30000 denarë. Sa është kamata e njehsuar pas pesë vjet prej sot, nëse norma e kamatës është 12% *p.a(d)* me kamatizim tremujor? (Vërejtje. Kamata patjetër të njehsohet në dy pjesë, dy vjet prej sot, pra kamata e dytë për mbetjen pas tërheqjes së mjeteve.)

5*. Para katër vitesh, personi ka paguar borxhin në lartësi prej 24000 denarë. Pas tre vjet, duhet të pëaguan edhe 30000 denarë. Me supozim se personi nuk ka kthyer asgjë prej borxhit, me të cilën shumë personi do ta paguan tërë borxhin, për dy vite prej tani? Norma e kamatës është 6% *p.a.* me kamatizim vjetor dekurziv? Por çfarë shume është e nevojshme në rastin e kamatizimit anticipativ?

7. 5. Njehsimi i periudhave të kamatizimit dhe normës së kamatës

Deri më tani për formulat e nxjerra, shfrytëzuam numër të viteve n prej më parë të njohur dhe më së shpeshti të shprehura vetëm në vite, me periudha saktë t përmendura të cilat puthiten me kamatizimin. Te ato detyra te të cilat koha ishte e dhënë ndryshe, e shndërruam në vite. Në praktikë, kjo rrallë ndodh, veçanërisht kur duhet të njehsohet koha e kamatizimit. Do të shohim se si ta njehsojmë kohën për të cilën kapitalli i dhënë sjell kamatë të caktuar, përkatësisht do ta njehsojmë numrin e kamatizimit. Do të shqyrtojmë shumën fillestare K, e cila kamatizohet me normë dekurzive p% *p.a.(d)*, me m kamatizim vjetor, gjatë kohës n, e cila nuk është patjetër të jetë numër i plotë i viteve. Prej formulës për njehsimin e vlerës së ardhshme të shumës $K_n = K\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}$, me transformimet do ta nxjerrim kohën n . Kështu,

$$\frac{K_n}{K} = \left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

prej ku duke logaritmizuar fitohet:

$$\log\frac{K_n}{K} = \log\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}.$$

Duke i shfrytëzuar vetitë e logaritmizimit mund të shkruajmë:

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\log\left(1+\frac{p}{100m}\right).$$

Te formula do ta fusim faktorin dekurziv $r = 1+\dfrac{p}{100m}$, pra fitohet:

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log r}\log\frac{K_n}{K}},$$

që është e saktë formula për njehsimin e kohës së kamatizimit.

Shpeshherë, logaritmi me bazë 10, zëvëndësohet me logaritmin me bazë *e*, përkatësisht mund të hasim edhe formulë ekuivalente:

$$n = \frac{1}{m\ln r}\ln\frac{K_n}{K}.$$

M ngjajshëm, në rastin kur kamatizimi është anticipativ, norma e kamatës n% *p.a.(a)*, për njehsimin e kohës për të cilën bëhet kamatizimi vjetor, me logaritmizimin e relacionit për vlerën e fundit të kapitalit kemi

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right).$$

Me zëvëndësimin e faktorit të kamatës anticipative $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi}$, formula bëhet

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\rho,$$

përkatësisht kohën e njehsojmë me formulën:

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log\rho}\log\frac{K_n}{K}}$$

1. a) Për sa vjet, sasia prej 25000 denarë me 6% *p.a.(d)*, do të rritet në 29851,31 denarë, gjatë kamatizimit gjysmëvjetor?

b) Për cilën kohë, kapitali prej 13200 denarë, do të kamatizohet deri në 18425,7 denarë me normë të kamatës p.a.(a) dhe kamatizimi vjetor.

Të dhëlnat të cilat janë dhënë te kushtet e detyrës janë krejtësisht përkatëse me formulat për njehsimin e kohës. Pas njehsimit të faktorit të kamatës, me zëvëndësimin direkt te formula, kemi

a) $r = 1+\dfrac{6}{200} = 1{,}03$, prej ku $n = \dfrac{1}{2\log 1{,}03}\log\dfrac{29851{,}31}{25000} = 3$ vite

b) $\rho = \dfrac{100}{100-8} = 1{,}0869565$, prej ku $n = \dfrac{1}{\log 1{,}0869565}\log\dfrac{18425{,}7}{13200} = 4$ vite

Logaritmizimin që e bëm te formula, mund të bëhet edhe në fund, pasi që te formula për vlerën e ardhshme do të zëvëndësohen të gjitha të dhënat e njohura.

Gjithashtu, koha fitohet edhe prej tabelave *i/i*, prej formulës për njehsimin e vlerës së ardhshme të shumës, duke lexuar te drejtëza tabelat *i/i* ose pra prej formulave për vlerën fillestare të shumës, duhe lexuar prej tabelës së dytë *i/i*.

2. Për sa vjert, shuma prej 200000 denarë, të deponuar me normë të kamatës 5% *p.a.(d)*, me kakatizim vjetor, do të rritet në 243101,25 denarë?

Prej formulës për vlerën e ardhshme të shumës kemi $K_n = K \cdot \mathrm{I}_p^n$, prej ku vlera tabelare e faktorit të kamatës kemi $\mathrm{I}_5^n = \dfrac{243101,25}{200000} = 1,21550625$. Te formula e parë, te pjesa për normën e kamatës prej 5%, e gjemë vlerën 1,21550625 te rreshti që i përgjigjet $n = 4$. ◆

Por, gjatë shfrytëzimit të tabelave *i/i*, ndodh që vlera të cilën e kemi fituar me njehsim, të mos jetë te tabelat, por vlera e fituar mund të vendoset ndërmjet vlerave të tabelës. Atëherë, zbatohet mënyra e njohur si interpolimi linear. Principi në të cilin bazohet metoda e interpolimit linear është veti e proporcioneve. Pikërisht, ndryshimet e vlerave tabelare qëndrojnë ndërmjet veti, si edhe ndryshimet e periodave përkatëse. Ta vërejmë këtë në shembull konkret.

3. Për cilën kohë, 50000 denarë, me 6% *p.a.(d)* kamata dhe kamatizimi semestral, do të rritet në 75000 denarë?

Formula për vlerën e ardhshme të shumës, duke shfrytëzuar tabelat, në rastin tonë është $K_{2n} = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$, prej ku vlera tabelare të cilën e kërkojmë është $\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n} = \dfrac{K_{2n}}{K} = \dfrac{75000}{50000} = 1,5$.

Te tabela e parë *i / i*, te shtylla për normën e kamatës 3%, sa është norma relative që e shfrytëzuam, nuk e gjejmë vlerën 1,5 . Por gjejmë vlerë ndërmjet të cilave ajo është vendosur, pra kështu 1,46853371 < 1,5 < 1,51258972, vlera më e vogël i përgjigjet 13 , kurse më e madhja periodës 14 të kamatizimit, të cilat i lexojmë sipas rreshtave. Përgjigja e dedtyrësonë është oha e kamatizimit ndërmjet 13 dhe 14 semestrave, por duhet të vërtetojmë sa më saktë. Për këtë qëllim, formojmë tabelë te e cila i vendosim vlerat e njoihura në këtë mëlnyrë:

$\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$	$2n$	$\mathrm{I}_{\frac{p}{2}}^{2n}$	$2n$
1,46853371	13	1,46853371	13
1,51258972	14	1,5	$2n$

Pasi që t'i kemi njehsuar ndryshimet sipas shtyllave, të cilat për shikim më të madh mund të vendosen në tabelën e njëjtë, e vendosim proporcionin:

(1,51258972 -1,46853371): (14 -13) = (1,5 -1,46853371): (2n -13).
Domethënë,

$$2n - 13 = \frac{0,03146629}{0,04405601},$$

prej ku $2n$ = 13,714 , përaktësisht kamatizimi zgjat gjithsej n = 6,857 vjet. Që ta shndërrojmë numrin në vite, muaj dhe ditë, pjesën dhjetore e shumëzojmë me 12 dhe i fitojmë muajt, kurse pjesën e re dhjetore me 30, prej ku i fitojmë ditët. Domethënë, pjesa 0,857 vjetështgë n rrealitet 0,857 -12 = 10,284 muaj, kurse 0,284 në ditë është 0,284 • 30 ≈ 9 ditë. Përfundimisht, kamatizimi zgjat 6 vjet, 10 muaj dhe 9 ditë. ◆

Në të njëjtën mënyrë shfrytëzohet tabela e dytë finansiare për njehsimin e kohës së kamatizimit.

4. Për cilën kohë, 20000 denarë, së bashku me 6% *p.a.(d)* kamatë,gjatë kamatizimit të gjysmëvjetit, do të rriten në 80000 denarë?

a) Së pari të fitojmë zgjidhje direkte sipas formulës, me loigaritmizim, faktori io kamatës është r =1,03 , m = 2, pra sipas formulës për vlerën e ardhshme të shumës $\frac{80000}{20000} = 1{,}03^{2n}$.

Nëse barazimi i fundit logaritmohet, me zbatimin e vetive të logaritmit kemi log4 = 2n • log1,03, prej ku n = 23,4527 vite.

b) Të shohim se si do të vijmë deri te rezultati i njëjtë duke shfrytëzuar tabelën e dytë finansiare, përkatësisht formulën për njehsimin e vlerës fillestare të shumës. Pikërisht $K = K_n \cdot \mathrm{II}_3^{2n}$, prej ku $\mathrm{II}_3^{2n} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, vlerë e cila te tabela e dytë, te shtylla për 3% nuk ekziston e njehsuar. Por i gjemë të dy vlerat më të përafërta të 47 semestrave , kurse më e vogla 46. Do t'i fusim vlerat në tabelë, te e cila do ta shtojmë, te rrshti i fundit dhe ndryshimi sipas shtyllave, për më lehtë ta formojmë proporcionin përkatës.

II_3^{2n}	$2n$	II_3^{2n}	$2n$
0,2567	46	0,2567	46
0,2493	47	0,25	$2n$
0,0074	-1	0,0067	$46-2n$

Prolporcioni përkatës është:

0,0074 : (-1) = 0,0067 : (46 - 2n),

përkatësisht duke u liruar prej shenjës negative:

0,0074 = 0,0067: (2n - 46).

Tani $2n - 46 = \frac{0,0067}{0,0074} = 0,9054$, prej ku $2n = 46,9054$. Atëherë, koha e kamatizimit është $n = 23,4527$ vjet, që është e saktë 23 vjet, 5 muaj dhe 13 ditë. ◆

Edhe pse të dy detyrat janë me zbatimin e normës së kamatës dekurzive, zgjidhja e detyrave me normën e kamatës anticipative, i shfrytëzon tabelat përkatëse anticipative ose faktorin e diskontit. Zbatimi i interpolimit linear është në të njëjtën mënyrë.
Algjebrikisht, me transformimin e formilave të njohura, ose duke i shfrytëzuar tabelat financiare, mund të arrijmë edhe deri te vlerat e normës së kamatës së panjohur, kur madhësitë tjera te formulat për vlerën e fundit ose fillestare të shumave të njohura.

Do të shqyrtojmë kamatizim me normë të kamatës dekurzive *p% p.a.(d)*, me *m* kamatizimi vjetor, gjatë vlerës së ardhshme të shumës: *n* vite. Prej formulës për njehsim të vlerës së ardhshme të shumës:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

Me rrënjëzim kemi $1 + \frac{p}{100m} = \sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}$, përkatësisht për normën e kamatës vlen

$$p = 100m \cdot \left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}} - 1\right).$$

5. Me cilën normë të kamatës dekurzive, kapitalli fillestar, për 8 vjet me kamatizim katërmujor, do të sjell kamatë të barabartë me kapitallin fillestar?

Prej kushtit të detyrës kemi se $I_8 = K$, përkatësisht te brazimi për kamatën, me zëvëndësimin kemi $I_8 = K_8 - K$, përkatësisht $K = K_8 - K$. Atëherë, $K_8 = 2K$. Poashtu, $n = 8$, $m = 3$. Zëvëndësojmë te formula e fituar për normën e:

$$p = 300 \cdot \left(\sqrt[24]{\frac{2K}{K}} - 1\right) = 300 \cdot \left(\sqrt[24]{2} - 1\right) = 8,79\%\ p.a.(d).$$

Te shembulli i njëjtë do të tregojmë se si zbatohen tabelat *i/i* për njehsimin e noprmës së kamatës. Dallimi i vetëm, prej interpolimit linear te koha e panjohur e kamatizimit, të cilën e vërejtëm paraprakisht është që tani përvçe vlerave tabelare, te tabela do t'i fusim edhe normat e kamatave dhe atë relativet. Kështu, në bazë të të dhënave të sipërme, mund t'i zëvëndësojmë te formula për njehsimin e kamtës $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}^{nm}_{\frac{p}{m}} - 1\right)$, më saktë.

$$I_8 = K \cdot \left(\mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm} - 1 \right),$$

ku $I_8 = K$.

Atëherë për vlerat prej tabelës së parë finansiare vlen $\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24} - 1 = 1$, përkatësisht $\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24} = 2$. Te tabneëa e parë *i/i*, te shtylla për normën e kamatës prej 2,75% , e gjemë vlerën 1,917626, kurse te shtylla për normën e kamatës 3% e gjemë vlerën 2,0327491. Vlera jonë është pikërisht ndërmjet këtyre dyjave. Te tabela do t'i fusim vlerat të cilat i lexojmë prej tabelës.

$\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24}$	$\frac{p}{3}$	$\mathrm{I}_{\frac{p}{3}}^{24}$	$\frac{p}{3}$
1,917626	2,75%	1,917626	2,75%
2,0327941	3%	2	$\frac{p}{3}$
0,115168	0,75%	0,0823739	$\frac{p}{3} - 2,75$

E formojmë pçroporcionin, pikërisht, ndryshimet e vlerfave tabelare qëndrojnë njëjtë si-kurse edhe ndryshimet e normave të kamatës, pra:

$$0,115168 : 0,75 = 0,0823739 : \left(\frac{p}{3} - 2,75 \right).$$

Atëherë, $\frac{p}{3} - 2,75 = \frac{0,75 \cdot 0,0823739}{0,115168}$, prej ku për normën e kamatës relative kemi $\frac{p}{3} = 2,928\%$, Përkatësisht norma e kamatës nominale dekurzive është p = 8,784% *p.a(d).*

Shmangëja e vogël prej vlerës së fituar paraprakisht i kushton rrumbullakimit të vlerave tabelare. ◆

6. Me cilën normë të kamatës anticipative, 80000 denarë, për dy vjet, me kamatizim dyvjeçar, bëhet 120000 denarë.

Do ta nxjerrim formulën direkt prej formulës së njohur për vlerën e ardhshme të shumës. Prej

$$K_n = K \left(\frac{100m}{100m - \pi} \right)^{nm},$$

Duke e zgjidhur barazimin sipas madhësisë së panjohurë *ū*, me rrënjëzim, fitohet:

$$\frac{100m}{100m-\pi}=\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}},$$

përkatësisht

$$100m-\pi=\frac{100m}{\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}}.$$

Për normën e kamatës anticipative kemi:

$$\pi=100m-100m\cdot\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}$$

ose përfundimisht

$$\pi=100m\left(1-\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}\right).$$

Në shembullin konkret, $n = 2$, $m = 2$, pra prej këtu:

$$\pi=100\cdot 2\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{K}{K_2}}\right)=200\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{80000}{120000}}\right)=200\cdot(1-0{,}9036)=19{,}28\%\ p.a.(a).\blacklozenge$$

Detyra për punë të pavarur

1. Për cilën kohë duhet 8000 denarë të jenë të deponuara në bankë, për të njëjtat të rriten në 55000 denarë, nëse kamatizimi është semestral, me normën e kamatës, nëse kamatizimi është semestral, me normën e kamatës prej:

a) p = 8%*p.a.(d)* b) p = 8%p.a.(a).

2. Për cilën kohë, gjatë kamatizimit tremujor, me normë të kamatës vjetore prej 7% , kapitali prej 20000 denarë, do të rritet në 40000 denarë, nëse kamatizimi është:

a) anticipativ; b) dekurziv?

3. Sa normë të kamatës nominale vjetore duhet të zbatohet, që kapitali prej 15000 denarë të rritet në sasi prej 286000 denarë, për 25 vjet, me kamatizim tremujor, nëse kamatizimi është:

a) anticipativ; b) dekurziv?

Detyra të zgjidhet edhe me zbatimin e tabelave *i /i* .

4. Me cilën normë të kamatës dekurzive, për kohën prej 18 vjet, shuma dyfish do të zmadhohet, nëse kamatizimi është vjetor? Detyra të zgjidhet edhe me zbatimin e tabelave për interes në interes.

5. Sot kemi deponuar 20000 denarë, por pas dy vjetë do të nxjerrim 10000 denarë. Cila normë e kamatës është zbatuar, nëse në katër vite prej sot do të disponojmë 30000 denarë me kamatizim tremujor? Shqyrtoi veçanërisht rastin dekurziv dhe anticipatriv.

6. 400000 duhet të paguhen në katër kiste të barabarta me 4% *p.a.(d)*. Kësta e parë duhet të paguhet pas 4, e dyta pas 6, e treta pas 15 dhe katërta pas 18 vjet. Pas sa vjet, tërë depoziti mund të paguhet menjëherë, me të njëjtën normë të kamatës dhe kamatizimi vjetor?

7. Personi ka deponuar shumën sot dhe pas dy vjet dhe gjashtë muaj, shuma është rritur në 40000 denarë dhe ka sjellur kamatë 10000 denarë. Të njehsohet me cilën normë të kamatës është deponuar shuma, nëse kamatizimi është gjysmëvjetore?

8*. Në datëlindjene 25-të, kemi deponuar në bankë, 40000 denarë, kurse në datëlindjen e 33 banka e ka lajmëruar se kemi kursim prej 76800 denarë. Cila normë e kamatës është zbatuar, nëse kamatizimi është gjysmëvjetore?

9*. Para 2 vjet janë deponuar 70000 denarë, sot janë nxjerrë 20000 denarë. Pas një viti do të deponojmë edhe 10000 denarë. Pas sa kohe do të disponojmë me 100000 denarë, nëse norma e kamatës është 10% *p.a.(a)*, me kamatizim vjetor?

7. 6. Detyra për ushtrime

1. Sot deponojmë 100000 denarë. Me cilën shumë do të disponojmë pas 15 vjet dhe 25 ditë, nëse norma e kamatës është 5% *p.a.(d)*, me kamatizim tremujor? Njehso me normën e kamatës tremujore dhe me metodën e kombinuar të llogarisë së kamatës së përbërë.

2. Në datën 10.09.2000 kemi deponuar 12000 denarë. Me cilën shumë do të disponojmë në fund të datës 31.12.2010, nëse norma e kamatës ka qenë 10% *p.a.(a)* me kamatizim vjetor, për tërë kohëzgjatjen e kursimit?

3. Duke i falenderuar bonusit të vitit të ri, në fund të vitit të kaluar kemi deponuar 60000 denarë, pas tre vjet, duhet të nxjerrim 24000 denarë, por pas pesë vjet prej deponimit të parë, do të mund të deponojmë edhe 40000 denarë. Me cilën shumë do të disponojmë në fund të vitit të tetë prej tani, nëse norma e kamatës është 3% *p.s.(d)*, me kamatizim tremujor?

4. Borxhi prej 120000 denarë duhet të kthehet në tre këste të barabarta dhe atë e para pas një viti prej tani, e dyta pas katër vjet, kurse e treta pas gjashtë vjetë. Me cilën shumë mund të kthehet tërë borxhi menjëherë në periudhë kohore dy vjet dhe gjashtë muaj, nëse norma e kamatës është 10% *p.a.(d)*, me kamatizim gjysmëvjeti?

5. Personi dëshiron të nxjerrë 600000 denarë prej bankës në të cilën kursen, për tetë vjet prej sot. Në moment ka deponuar 100000 denarë, ka mundësi të deponon 200000 denarë, pas pesë vjet dhe të paguan borxhin, nëse ngel borxhli edhe pas 10 vjet. Sa do të jetë borxhi i ngelur pas dhjetë vjet, nëse norma e kamatës nominale është 8% *p.a.(d)* me kamatizim semestral.

6. Njehso vlerën e tanishme të borxhit që pas 25 muajve është 50000 denarë, me normë të kamatës 8% *p.a.(d)* dhe kamatizim kuartal:

a) duke përdor vetëm llogarinë e kamatës së përbërë;

b) duke shfrytëzuar metodën e kombinuar të llogarisë së përbërë dhe të thjeshtë për muajin e fundit.

7. Për sa vjet, 20000 denarë me 5% *p.a.(d)*, do të bëhen 74669,12 denarë, nëse kamatizimi është vjetore? Detyra të zgjidhet algjebrikisht dhe me zbatimin e tabelave *i /i* .

8. Për cilën kohë, cilado shumë, me normë të kamatës prej 6,5% *p.a.(d)*, trefish do të zmadhohet llogaria e kamatës, me kamatizim gjysmëvjeti? Sa ndryshon koha gjatë kushteve të njëjta, me normë të kamatës anticipative? Zbato edhe njehsimet algjebrike dhe tabelat finansiare.

9. Para 15 vjet janë deponuar 10000 denarë, por para tetë vjet edhe 20000 denarë. Edhe sa duhet të deponojmë sot, që pas dhjetë vjet të disponojmë me 100000 denarë? Norma e kamatës është 4% *p.a.* , me kamatizim semestral dekurziv.

10. Cila shumë për dymbëdhjet vjet dhe tre muaj gjatë 6% *p.a.(a)* norma e kamatës me kamatizim tremujor, do të sjell kamatë të njëjtë sikurse edhe 50000 denarë, për kushte të njëjta, për tredhjetë muaj?

11. Për pasurinë e tij, personi ka marrë tre oferta dhe atë:

1) 40000 denarë menjëherë, 120000 denarë pas 8 vjet, 7 muaj dhe 20 ditë me normë të kamatës 5% *p.a.(d);*

2) 200000 denarë, pas 10,5 vjet, ma normë të kamatës 6% *p.a.(d)*;

3) 80000 denarë menjëherë, 100000 denarë pas 5 vjet dhe 6 muaj, me normë të kamatës 3% *p.a.(d).*

Të njehsohet cila ofertë është më e volitshme?

12. Shuma prej 100000 denarë është deponuar me normë të kamatës 5,4% *p.a.(d)*, por shuma prej 80000 denarë, me normë të kamatës 9,6% *p.a.(d)*. Kur që të dy shumat do të jenë të barabarta, nëse kamaizimi në të dy rastet të jetë tremujore? Sa ndryshon koha nëse shuma e dytë kamatizohet anticipative?

13. Duhet të paguajmë 80000 denarë, pas u8 vjet me 3% *p.a.(d)* normë të kamatës, 40000 denarë, pas 20 vjet me 4% *p.a.(d)* normë të kamatës dhe 20000 denarë, pas 23 vjet me 6% *p.a.(d)* normë tëkamatës. Me cilën normë të kamatës, mund të paguhet borxhi pas 25 vjet, nëse kamatizimi për tërë kohëzgjatjen është semestrale?

14. Ndërmarrja me përgjegjësi të kufizuar ka borxh:
– 50000 denarë, të cilat duhet të paguhen pas 5 vjet, me 5% *p.a.(d)* normë të kamatës;
– 80000 denarë, të cilat duhet të paguhen pas 8 vjet, me normë të kamatës 6% *p.a.(d);*
– 40000 denarë, pas 12 vjet me 8% *p.a.(d)* normë të kamatës.

Në të njëjtën kohë sipërmarrja ka kërkuar 60000 denarë, të cilat duhet t'i paguan pas 0 vjet me 3% *p.a.(d)* normë të kamatës. Sa është saldoja e borxhit (por me llogari të kamatës së përbërë, jo sipas formulave për llogarinë e kamatës së thjeshtë), që duhet të paguhet pas 15 vjet me 5% *p.a.(d)* normë të kamatës. Kamatizimi është vjetore.

15*. Personi ka deponuar 18000 denarë në datëlindjen e tij të 34. Në datëlindjen e tij të 38 ka deponuar edhe 12000 denarë, por në datëlindjen e tij të 41 ka nxjerrë 24000 denarë. Me cilën shumë do të disponon personi në datëlindjen e tij të 46, nëse norma e kamatës është 8% *p.q.(d)*, me kamatizim tremujore. Zbato normën e kamatës konforme.

16. Sipërmarrja SIGL për prodhim ofron 60000 denarë, kurse sipërmarrja GLCI, për të njëjtin prodhim ofron 160000 denarë, pas 2 vjet, me normë të kamatës 5% *p.m.(d),* me kamatizim tremujor. Cila ofertë është e volitshme?

17*. Para 3 vjet kemi deponuar 50000 denarë, pas një viti duhet të nxjerrim 10000 denarë, por pas 3 vjet na duhen edhe 20000 denarë, të cilat i nxjerrim prej llogarisë. Pas sa kohe mund të llogarisim se kemi kursim prej 600000 denarë? Norma e kamatës është 4% *p.a.(d)* me kamatizim gjysmëvjeti.

18. Para 2 vjet kemi deponuar 80000 denarë, pas 3 vjet do të nxjerrim 32000 denarë. Me çfarë kamate të përgjithshme do të dispopnojmë pas 7 vjet prej sot, nëse norma e kamatës është 5% *p.a.(d)*, me kamatizim vjetor?

19. Para 2 vjet dhe 3 muaj është deponuar shuma, e cila deri më sot së bashku me kamatën e njehsuar është 20000 denarë, por kamata e njehsuar është 5000 denarë. Me cilën normë të kamatës dekurzive është njehsuar kamata, nëse kamatizimi është tremujor? Sa është ndryshimi i normës, nëse kamatizimi është anticipativ?

20*. Para një viti dhe dy muaj, janë deponuar 12000 denarë, por pas dy vjet dhe katër muaj janë nxjerrë 20000 denarë, me të cilën llogaria është në saldo zero. Me cilën normë dekurzive vjetore është njehsuar kamata, nëse kamatizimi është gjysmëvjeti?

21*. Sot janë deponuar dy shuma të barabarta, në dy banka të ndryshme. Njëra me normë 16% *p.a.(d)*, kurse tjetra me normë të kamatës 10% *p.a.(d)*. Pas sa kohe, shuma e fundit në bankën e parë do të jetë dy herë më e madhe se shuma e fundit të mjeteve të deponuara në bankën e dytë? Sa janë shumat, nëse ndryshimi i kamatave për atë periudhë është 33200 denarë, gjatë kamatizimit gjysmëvjeti?

Pasqyra tematike

Kamata e njehsuar e ndonjë shume mund të jetë **e thjeshtë** dhe **e përbërë**. **Kamata e thjeshtë** ose interesi i thjeshtë njehsohet në të njëjtën shumë të pandryshuar në çdo periudhë të njehsimit të kamatës. Kur kapitali gjatë një periudhe të njehsuar zmadhohet dhe me atë paraqet bazë për njehsimin e kamatës për periudhën e ardhshme, flasim për njehsimin e **kamatës së përbërë,** por vet njehsimi quhet **norma e kamatës së përbërë** ose njehsimi i **interesit në interes.**

Periudha në të cilën njehsohet kamata quhet **periudha e kapitalizimit** ose **periudhë e kamatizimit.** Pranë katër madhësive themelore që paraqiten gjatë normës së kamatës së thjeshtë:

• shuma fillestare (kapitali fillestar, kryesorja) K

• kamata e njehsuar i

• norma e kamatës (në përqindje) p, përndryshe e barabartë me kamatën për 100 denarë për njësi kohe

• koha për të cilën njehsohet kamata t, e shprehur në vite ose njësi më të vogla ose më të mëdhaja se viti.

Te kamata e përbërë si element i parë paraqitet

• numri i kamatizimit gjatë një viti m , përkatësisht numri i periudhave në vit.

Kështu, kamatizimi vjetor shënohet me *(a)*, gjysmëvjetore (semestrale) me *(s)*, tremujore (kuatrale) me *(q)*, mujore me (m), ku norma e kamatës më së shpeshti konstatohet në nivel vjetor.

Nëse norma e kamatës është dhënë si normë vjetore e kamatës, e njëjta shënohet me *p.a.*, nëse është dhënë si gjysmëvjetore, atëherë sjell shtim *p.s.*. Mund të jetë e dhënë në nivel të tremujores, pra e shënojmë me *p.q.* ose si kamatë mujore, pra sjell shtim *p.m.* Kështu norma e dhënë e kamatës, quhet **norma e kamatës nominale.**

Ndodh, periudha në të cilën është dhënë norma e kamatës të jetë e ndryshueshme prej periudhës në të cilën kryhet kamatizimi është e nevojshme të kryhet barazimi, përkatësisht sjellja në normën e kamatës të periudhës së kamatizimit. Kështu norma e kamatës së fitura quhet **norma e kamatës relative.**

Nëse kamatizimi kryhet në fund të çdo periudhe njehsuese, bëhet fjalë për **njehsim dekurziv të kamatës,** përkatësisht **kamatizimi dekurziv,** kurse norma e kamatës shënohet me *p.a.(d)*. Poashtu, baza për njehsimin e kamatës dekurzive është kapitali në fillim prej periudhës së kamatizimit.

Nëse kapitalizimi bëhet në fillim të çdo periudhe, baza për njehsim të kamatës anticipative është kapitali në fund të periudhës së kamatizimit, por themi se kamata anticipative është kapitali në fund të periudhës së kamatizimit, por themi se punohet për **kamatizimi anticipativ.** Norma e kamatës shënohet me $p.a.(a)$.

Vlera e fundit të shumës, e zmadhuar për shumën e kamatës së përbërë, në fund të gjithë periudhës së kamatizimit, e quajmë **vlera e ardhshme e shumës.** Vlera fillestare e shumës e cila kamatizohet, K, quhet **vlera e tanishme e shumës.**

Vlera e ardhshme e shumës K që kamtizohet dekurzive në periudhën prej n vite me normë të kamatës dekurzive p dhe m periudhë të kamatizimit në një vit është

$\boxed{K_n = Kr^{nm}}$ ku $\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}}$ quhet faktori i kamtës.

Vlera e ardhshme e shumës K që kamatizohet anticipative në periudhën prej n vite me normë të kamatës dekurzive p dhe m periudhë të kamatizimit në një vit është

$\boxed{K_n = K\rho^{nm}}$ ku $\boxed{\rho = \frac{100m}{100m - \pi}}$ quhet faktori i kamatës anticipative.

Norma e kamatës edhe përveç zmadhimit të numrit të kapitalizimit gjatë një viti, jep sasi të njëjtë si edhe normës së kamatës vjetore me një kapitulim quhet **norma e kamatës konforme,** dhe e shënojmë me $p_{km.}$ **Norma e kamatës konforme,** e cila me m kamatizon gjatë një viti jep sasi të barabarta si edhe norma p me një kamatizim vjetor, njehsohet sipas formulës.

$$\boxed{p_{k,m} = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)}.$$

Vlera fillestare K prej të cilës fitohet shuma e kamatizuar $K_{n,}$ nëse e dim normën e kamatës përkatëse, numrin e kamatizimit vjetor m dhe kohën për të cilën kamatizohet n , njehsohet sipas formulave

$\boxed{K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100m})^{nm}}}$ gjatë kamatizimit dekurziv

$$\boxed{K = K_n \rho^{-nm} = K_n \left(1 - \frac{\pi}{100m}\right)^{nm}}$$ gjatë kamatizimit anticipativ.

Mënyra e caktimit të vlerës fillestare të shumës, quhet **diskontim,** përkatësisht përcaktimi i vlerës themelore të shumës. Vlera reciproke e faktorit kamtë, r^{-nm} dhe ρ^{-nm} , quhet **faktor diskonti.**

Te kamatizimi dekurziv me normën e kamatës p ,me m periudha të kamatizimit vjetor, **kamata** njehsuese është

$\boxed{I_n = K\left(r^{nm} - 1\right)}$, ku r është faktori i kamatës dekurzive.

Te kamatizimi anticipativ, me normën e kamatës, π dhe m periudhat e kamatizimit vjetor, për kamatën e njehsuar kemi

$\boxed{I_n = K\left(\rho^{nm} - 1\right)}$, ku p është faktori i kamatës anticipative.

Për njehsimin e **kohës për të cilën kryhet kamatizimi,** kur kamatizimi është dekurziv dhe normë e kamatës $p\%$ $p.a.(d)$, gjatë m kamatizimit vjetor shfrytëzohet formula

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log r} \log \frac{K_n}{K}}$$

Për njehsimin e kohës për të cilën kryhet kamatizimi, kur kamatizimi është anticipative dhe normë e kamatës $\pi\%$ $p.a.(a)$, gjatë m kamatizimit vjetor shfrytëzohet formula

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log \rho} \log \frac{K_n}{K}}.$$

Për njehsimin e normës së kamatës dekurzive vjetore me kamatizim vjetor, gjatë $\bar{u}$ vite shfrytëzohet formula m

$$\boxed{p = 100m \cdot \left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}} - 1\right)}$$

8. DEPONIME PERIODIKE (DEPOZITA) DHE TË ARDHURAT PERIODIKE (RENTA)

8. 1. Depozitat periodike

Gjatë zbatimit të llogarisë së kamatës së thjeshtë dhe të përbërë shqyrtojmë shuma të cilat njëherë deponohen, si edhe shembuj te të cilat shuma deponohet ose nxirret në periudha të ndryshme. Poashtu deponimet e veçanta mund të jenë të barabarta, por edhe të ndryshme, të ndryshohen sipas ligjit të caktuar, për shembull, të rriten ose të zvogëlohen sipas ligjit të progresikonit aritmetik ose gjeometrik ose sikurse te kursimi, të ndryshojnë pa e konstatuar ligjin prej më parë. Por, shpeshherë ndodh deponimet të përsëriten në intervale kohore të barabarta. Kur shumë herë deponohet sasia e njëjtë, në periudha të njëjta kohore dhe kamatizohet me të njëjtën normë të kamatës, flasim për **depozitë,** të cilët për shkak të sasisë së njëjtë deponohet ende dhe depozita të njëjta.

Varësisht prej asaj se deponimi (pagesa e depozitit) është në fillim ose në fund të intervalit kohor, dallojmë **depozitë anticipativ,** përkatësisht **dekurziv.** Gjatë deponimit, çvo depozit i veçantë kamatizohet prej momentit të deponimit deri te momenti i njehsimi të vlerës së fundit të depozitave. Mund të shfrytëzohen edhe kamatizimet dekurzive dhe anticipative. Poashtu mendet deponimet e veçanta të puthiten me kamatizimin, por mundet të jenë më të rralla ose më të shpeshta prej kamatizimit. Parashtrohet pyetja sa është vlera e përgjithshme prej të gjitha depozitave të veçanta.. **Vlera e fundit** e deponimit quhet shuma e depozitave të veçanta të kamatizuara në fund të periudhës.

Do të shqyrtojmë vetëm deponimet të veçanta periodike te të cilat deponimet puthiten me kamatizim, ku deponimet te të cilat puthiten me kamatizimin, gjatë deponimeve me depozitë të rregullt (të pandryshueshëm).

Deri sa gjatë viti paguhet një depozitë, flasim për **depozitë vjetor,** nëse deponmimi është dyherë në vit, deponimet janë **gjashtëmujore (semestrale),** për deponimet 4 herë në vit, përkatësisht në çdo tre muaj, depozitat janë **tremujore (kuartale).** Nëse deponimi është njëherë në muaj, atëherë themi sepozitata janë **mujore.** Edhe këtu kamatizimi mund të jetë vjetore, gjashtëmujore, tremujore etj.

Detyra për punë të pavarur

1. Çka paraqet depoziti? Cilët janë karakteristikat e tij themelore?
2. Çfarë depozita dallojmë sipas mënyrës së njehsimit të kamatës?
3. Çfarë depozita dallojmë sipas numrit të deponimit?

4. Çfarë depozita dallojmë sipas kohës së deponimit?

5. Çka paraqet vlera e fundit e deponimeve?

8. 2. Njehsimi i vlerës së fundit të depozitave

Vlera e çdo depoziti të veëantë le të jetë V. Numri i deponimeve të veçanta është n, kurse norma e kamatës së preiudhës së kamatizimit është dekurzive dhe është $p\%$. Periudha e kamatizimit puthitet me periudhën e deponimit. Depoziti le të paguhet në mënyrë anticipative (në fillim të çdo periudhe). Faktori i kamatës dekurzive, të periudhës së kamatizimit është $r = 1 + \frac{p}{100}$.

Duke llogaritue kamatën e përbërë për çdo depozitë të veçantë, do ta fitojmë depozitin e fundit. Fig. 1 e tregon deponimin dhe kamatizimin

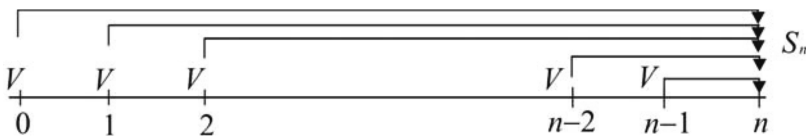


Fig. 1

Shuma e parë e deponuar në fillim të periudhës së parë, kamatizohet për n –periudha, me faktorin përkatës të kamatës r , deri në fund të periudhës së fundit dhe është Vr^n. Shuma e dytë V, kamatizohet bë n -1 periudhë, pra vlera e tij e fundit është Vr^{n-1}. Në të njëjtën mënyrë kamatizohen të gjitgha depozitat e veçanta. Depoziti i parafundit është momenti i kohës n - 2 , por kamatizohet në dy perudha, pra vledra e fundit është Vr^2 , ndërsa depoziti i fundit kamatizohet vetëm njëherë dhe ngel Vr. Shuma e tëgjitha depoimeve të veçanta anticipative, të kamatizuara deri në fund të periudhës së shqyrtuar është:

$$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + Vr = V\,(r^n + r^{n-1} + \ldots + r^2 + r\,) = Vr\,(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1).$$

Shprehja në kllapa e paraqet shumën e n anëtarëve të progresionit gjeometrik, me anëtarin e parë r dhe prfej këtu, duke shfrytëzuar formulën për shumën, fitojmë se shuma e depozitave të kamatizuara anticipative, me zbatimin e kamatizimit dekurziv, njehsohet me:

$$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Vërejtje 1. Te tabelat për interes në interes, i / i, vlera e shprehjes $r\frac{r^n - 1}{r - 1}$, që e tregon shumën e depozitit të kamatizuuar dekurziv në sasi prej një njësie të parash, mundet të gjendet nën shenjën III_p^n. Domethënë, për vlerat në tabela e tretë vlen $\mathrm{III}_p^n = r\frac{r^n - 1}{r - 1}$.

Shprehja fitohet si shumë e vlerave I_p^k, prej tabelës së parë *i / i*, duke i mbledhur për të njëjëtën normë të kamatës, për të gjiktha periudhat prej 1 deri *n*, përkatësisht $\mathrm{III}_p^n = \mathrm{I}_p^1 + \mathrm{I}_p^2 + \ldots + \mathrm{I}_p^n$. Poashtu, deponimi është në vijim në *n* vite, me normën e kamatës *p% p.a(d*). Atëherë formula për njehsimin e shumës së kamatizimit të deponimeve anticipative është:

$$\boxed{S_n = V \cdot \mathrm{III}_p^n}.$$

Vërejtje 2. Nëse norma e dhënë për çdo periudhë të dhënë të veçantë është anticipative, e shfrytëzojmë faktorin e kamatës anticipative ρ, pra shuma prej depozitave të kamatizuara anticipative të kmatizuara është:

$$\boxed{S_n = V\rho \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}},$$

ku $\rho = \dfrac{100}{100 - \pi}$ e është faktori i kamatës anticipative

Duke e shfrytëzuar tabelën e tretë *i / i*, për shumën fitohet $\boxed{S_n = V \cdot \mathrm{III}_\pi^n}$, ku π norma e kamatës anticipative.

Te detyrat, më së shpeshti, nuk është dhënë nujmri i përgjithshëm i deponimeve, por numri i deponimeve vjetore dhe gjatësia e intervalit kohor në të cilin deponohet. Për shembull, deponohet gjatë *n* viteve, *m* herë në vit. Atë herë numri i përgjithshëm i deponimit është prodhimi $n \cdot m$.

1. Prej sot fillojmë të deponojmë, në fillim të çdo tremujori, pas 5000 denarë, gjatë dy viteve të ardhshme. Cila është shuma e përgjithshme që e posedojmë në fund të vitit të dytë, nëse norma e kamatës është 10% *p. a* (d) me kamatizim tremujor?

Vlera e depozitit të veçantë është V_{aq} = 5000 denarë. Numri i deponimeve është $n \text{ -}2 \cdot 4 = 8$, pas katër deponimeve gjatë katër deponmeve të çdo vitit, faktori i kamatës dekurzive do të njehsohet për kamatizim tremujor, përkatësisht për normën e kamatës $\dfrac{10}{4} = 2{,}5\%$ $p.q(d)$ (norma kuartale). Atëherë $r = 1 + \dfrac{2{,}5}{100} = 1{,}025$. Vlera e fundit e deponimeve anticipative do të jetë:

$$S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1} = 5000 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^8 - 1}{1{,}025 - 1} = 44773 \text{ denarë.} \ \blacklozenge$$

Le të vlejnë të njëjtat kushte prej fillimit, çdo depozitë e ka vlerën V, nujmri i depozitave është *n*, norma e kamatës prej *p%* është dekurzive, kurse periudha e kamatizimit puthitet me periudhën e deponimeve.

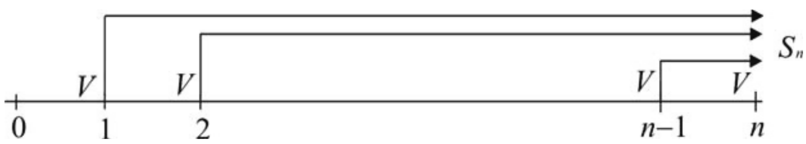


Fig. 2

Faktori i kamatës dekurzive le të jetë r, por deponimi në fund të çdo periudhe, përkatësisht le të jenë depozita dekurzive. Si mund të vërehet prej fig. 2 depoziti i fundit nuk është kamatizuar, i parafundit kamatizohet njëherë, duke u kthye pas te kamatizimi i dytë n - 2 herë, kurse i pari n -1 herë. Sasitë e fundit të kamatizuara janë V , Vr, Vr^2,..., Vr^{n-2}, Vr^{n-1}. Për shumën e depozitave të kamatizuar (vlera e fundit) kemi:

$$S_n = V + Vr + Vr^2 + ... + Vr^{n-2} + Vr^{n-1} = V\,(1 + r + r^2 + ... + r^{n-2} + r^{n-1}).$$

Duke pasur parasysh atë që shprehja në kllapa paraqet shumë të n anëtarëve të progresionit gjeometrik me anëtarin e parë 1 dhe herës r, për vlerën e fundit të depozitit dekurziv kemi:

$$\boxed{S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Vërejtja 3. Shprehja $\frac{r^n - 1}{r - 1}$, te tabelat i / i mund të gjendet në formën $\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)$. Domethënë, formula për njehsimin e shumës së depozitave me kamatizim dekurziv shkruajmë në formën:

$$\boxed{S_n = V \cdot \left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)}.$$

Vërejtja 4. Nëse shfrytëzohet kamatizimi anticipativ,m vlera e fundit e deponimeve merr formën:

$$\boxed{S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}},$$

ku ρ është farktoi përkatës anticipativ, $\rho = \frac{100}{100 - \pi}$. Duke shfrytëzuatr tabelat e treta *i/I,* vlera e përgjithsme e depozitave dekurzive të kamatizuara me kamatizimin anticipativ njehsohet me:

$$\boxed{S_n = V \cdot \left(1 + \mathrm{III}_\pi^{n-1}\right)}.$$

2. Në bankë deponojmë nga 10000 denarë, në fund të çdo viti, gjatë katër viteve. Sa është vlera e fundit e deponimit në fund të vitit të katërtë, nëse norma e kamatës është 6% *p. a (d)*, kamatizimin vjetor ikamatizimit?

Prej kushteve te detyra kemi V_{da} = 10000 denarë, $n = 4$, $r = 1,06$. Për vlerën e fundit të depozitave dekurzive fitohet:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r-1} = 10000 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06 - 1} = 43746 \text{ denarë.} \blacklozenge$$

Mund të vërejmë se, depozita anticipative me kamatizim dekurziv, me kuishte të njëjta, sjellin *r* herë vlerë të fundit më të madhe prej depozititi dekurziv me kamatizim, përkatësisht:

$$S_n{}^a = Vr\frac{r^n - 1}{r-1} = r \cdot S_n{}^d,$$

Por në rastin kur kamatizimi është anticipativ, $S_n{}^a = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = \rho \cdot S_n{}^d$ domethënë, depozitet anticipative me kamatizim anticipartiv sjellin ρ herë më e madhe shumë prej depozitave me kamatizim anticipativ dhe kushte të njëjta të deponimit.
(për shënim më të shkurtër, S_n^a paraqet vlerën e fundit të anticipative, kurse S_n^d depozitave dekurzive).

3. Gjatë një vit e gjysmë, personi deponon në fund të mujait nga 3000 denarë Me çfarë shume do të disponon personi në fund tëperiudhë, nëse norma e kamatizimit është 6% *p. a (d)* me kamatizim mujor?

Prej kushteve $V_{dm} = 3000$ denarë, $p =$ ***6%*** *p.a(d)*. Numri i përgjithshëm i depozitave është $n =$ 12 -1,5 = 18 (1,5 vjet nga 12 depozita vjetore), kurse norma e kamatës që i përgjigjet kamatizimit është $\frac{6}{12}\%$, përkatësisht 0,5% p. *m (d)*. Faktori i kamatës dekurzive është $r = 1 + \frac{0{,}5}{100} = 1{,}005$.

Për vlerën e fundit të depozitit dekurziv është depoziti dekurziv kemi:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r-1} = 3000 \cdot \frac{1{,}005^{18} - 1}{1{,}005 - 1} = 56357 \text{ denarë.} \blacklozenge$$

4. Duke filluar prej datëlindjes 25, pra deri në datëlindjen e 30 , në fund të çdo gjashtëmujori, personi deponon nga 8000 denarë. Në datëlindjen 35 personi duhet të nxjerrë 90000 denarë. Personi a do të ketë mjete të mjaftueshme nëse norma e kamatës është p = 8% p. *a (d)* me kamatizim semestral?

Gjatë 5 viteve, personi deponon depozit dekurziv prej V_{ds} = 8000 denatë. Vlera e fundit e datëlindjes së 30 vazhdon të kamatizoj edhe 5 vjet (fig. 3). Parashtrohet pyetja në datëlindjen e 35, sasia e kamatizuar a është më e madhe se 90000 debnarë, përkatësisht a është $S_n \cdot r^{10} - 90000 \geq 0$?
Faktori i kamatës është $r = 1 + \frac{8}{2 \cdot 100} = 1{,}04$,

kurse numri i përgjithshëm i depozitit është n =10.

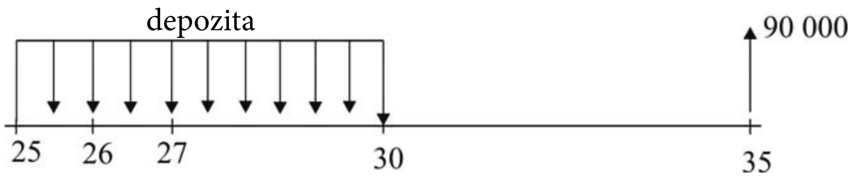


Fig. 3

Atëherë,

$$V\frac{r^{10}-1}{r-1}\cdot r^{10}-90000=8000\cdot\frac{1{,}04^{10}-1}{1{,}04-1}\cdot 1{,}04^{10}-90000=6049 \text{ denarë.}$$

Domethënë, personi ka mjaftë mjete për të nxjerrë 90000 denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Sa është shuma e fundit e depozitave prej 5000 denarë, të cilat janë deponuar gjatë 16 vjetëve, në fillim të çdo gjysmëviti, nëse norma e kamatës është:

a) 4% p. *a (d)* ma kamatizim semestral;

b) 4% p. *a (a)* ma kamatizim semestral?

2. Në fund të çdo viti, gjatë 10 vjetëve, deponojmë nga 10000 denarë, me normë të kamatës 4% p. *a* (*d*) dhe kamatizim vjetor. Njehso vlerën e fundit të deponimeve, në ditën e depozititi të fundit.

3. Në cilën shumë do të rritet depoziti gjysmëviti prej 1000 denarë, nëse deponojmë 12 vjet me 8% p. *a (d)* kamatë dhe kamatozim gjysmëviti dhe nëse depozitët janë:

a) dekurzive; b) anticipative?

4. Në cilën shumë do të rritet depoziti prej 3000 denarë, për 8 vjet, nëse pagesa në çdo muaj, me normë të kamatës:

a) 12% p. *a (d)* me kamatizim mujor;

b) 12% p. *a* (*a*) me kamatizim mujor?

5. Njehso shumën e depozitit prej detyrës 4, gjatë kushteve të njëjta, por për depozitin mujor anticipativ. Krahasoi vlerat e fituara. Cili lloj i depozitit dhe me çfarë norme të kamatës sjell vlerë të fundit më të madhe?

8. 3. Njehsimi i vlerës së depozitit të veçantë

Le të jenë të njohura norma e kamatës p% *p.a.(d)*, Vlera e fundit e depozitave S_n dhe koha e deponimit. Që të njehsohet sasia e depozitit të përhershëm, prej formulës për vlerën e fundit të depozitit anticipativ $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$, për depozitin V kemi:

$$\boxed{V = S_n \frac{r - 1}{r(r^n - 1)}}.$$

1. Në fund të periudhës pesëvjeçare të deponimit, vlera e fundit e deponimit është 40000 denarë. Sa depozitë paguhet në fillim të çdo norme të kamatës 6% *p. a(d)* me kamatizim vjetor

Bëhet fjalë për depozitin anticipativ, me faktorin e kamatës dekurzive r = 1,06. Janë deponuiar gjithsej n = 5 deponime, vlera e fundit të të cilave është S_n = 40000 denarë, por duhet të njehsohet vlera e depoziti vjetor të veçantë. Me zëvëndësimin e madhësive të njohura, në shembullin konkret kemi:

$$V_a = 40000\frac{1{,}06 - 1}{1{,}06 \cdot (1{,}06^5 - 1)} = 6694 \text{ denarë.} ◆$$

Nëse dihen norma e kamatës p% *p.a.(d)*, vlera e fundit e depozitave S_n dhe koha e deponimit, që të njehsohet sasia e depozitit të përhershëm, prej formulës për vlerën e fundit të depozitit dekurziv $S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}$, për depozitin V kemi:

$$\boxed{V = S_n \frac{r - 1}{r^n - 1}}.$$

Vërejtje 1. Në rastin kur kamatizimi është anticipativ, formulat përkatëse për vlerën e depozitit të veçant janë: për deponimin anticipativ kemi

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho - 1}{\rho(\rho^n - 1)}},$$

dhe për deponimin dekurziv

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho - 1}{\rho^n - 1}}.$$

2. Sa depoztitë duhet të paguhet në fund të çdo semestri, gjatë 5 viteve, nëse na nevojiten 120000 denarë në fund të vitit të pestë? Norma e kamatës është 5% p. *a (d)* me kamatizim semestral.

Numri i deponimeve është n = 10, S_n = 120000 denarë, kurse faktori i kamatës dekurzive është $r = 1 + \frac{5}{2 \cdot 100} = 1{,}025$. Atëherë,

$$V = S_n \frac{r-1}{r^n - 1} = 120000 \cdot \frac{1{,}025 - 1}{1{,}025^{10} - 1} = 10714 \text{ denarë.} \ \blacklozenge$$

3. Tre vitet e ardhshme do të paguajmë depozitë tremujor në fillim të çdo kuartali. Pesë vjet prej sot njëherë do të deponojmë 40000 denarë. Pas shtatë vjet prej sot do të nxjerrim 100000 denarë. Norma e kamatës është 8% p. *a (d)* për tërë periudhën kohore, me kamatizimin kuartal. Sa duhet të jetë depoziti periodik për shtatë vjet prej sot në llogari të na ngelin 35000 denarë?

T'i tregojmë deponimet dhe nxjerrjet e boshtit kohor (fig. 4).

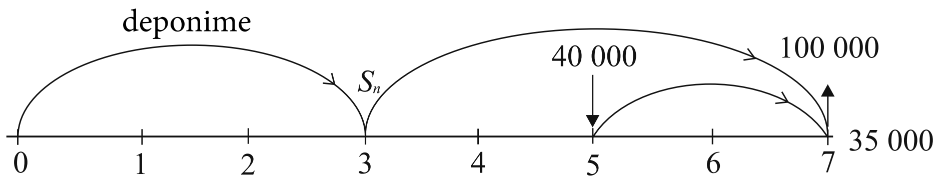


Fig. 4

Pasi që të njehsohet shuma e fundit e depozitave, ai kamatizohet edhe 4 vjet. Paratë e deponuara 40000 denarë kamatizohen edhe 2 vjet. Pas nxjerrjes të mjeteve vlen ky barazim:

$$S_n \cdot r^{4 \cdot 4} + 40000 \cdot r^{2 \cdot 4} - 100000 = 35000 .$$

Barazimi i fundit i tregon hapat e ndërrmarra të sjellura në shtatë vjet prej sot. Poashtu $S_n = Vr\frac{r^{3 \cdot 4} - 1}{r - 1}$, shuma e deponimeve anticipative, të cilat janë n = 12 në numër, me faktorin $r = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100}$ e kamatës dekurzive $= 1{,}02$. Norma e kamatës kuartale relevante është 2%. S_n kamatizohet 16 herë, por sasia prej 40000 denarë, 8 herë. Atëherë,

$$V \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot 1{,}02^{16} + 40000 \cdot 1{,}02^{8} = 135000$$

$$V \cdot 18{,}78 + 46866 = 135000$$

prej këtu depoziti është V_{aq} = 4693 denarë. $\blacklozenge$

Vërejtja 2. Për detyrat si e fundit më së miri është të shënohen deponimet e boshtit kohor, për shkak që më lehtë të njehsohen periudhat e kamatizimit.

Detyra për punë të pavarur

1. Sa depozitë gjashtëmujor dekurziv duhet të paguhet, që në fund të vitit të shtatë të kemi 300000 denarë, nëse norma e kamatës është:

a) 4% *p. a (d)* me kamatizim gjashtëmujor;

b) 4% *p. a (a)* me kamatizim gjashtëmujor?

2. Nga sa denarë duhet të deponojmë në mënyrë anticipative vjetore, gjatë 6 vjetëve, nëse dëshirojmë në fund të vitit të gjashtë të kemi gjithsej 71420 denarë, së bashku me kamatën e njehsuar për 5% *p. a (d)*? Kamatizimi është vjetore.

3. Nga sa denarë duhet në mënyrë dekurzive tremujore duhet të deponon personi prej moshës 25 vjeçare deri në moshën 40 vjeçare, që në fund për në moshën 50 vjeçare të disponon me shumë prej 500000 denarë? Norma e kamatës është 6% *p. a (d)*, kurse kamatizimi është tremujore.

4. Dy vjet e gjashtë muaj, personi ka deponuar rregullisht depozit tremujor anticipativ dhe në fund të periudhës të disponon me 50000 denarë. Sa është depoziti nëse norma e kamatës është 6% *p. a(d)* me kamatizim tremujor?

5*. Personi ka deponuar në moshën e tij 35 deri në moshën 40 vjeçare, depozit gjashtëmujor dekurziv. Cilën shumë e ka deponuar personi, nëse dëshiron në moshën 43 vjeçare në fund të nxjerrë 16000 denarë, por në fund të moshës 47 vjeçare të ketë gjithsej 120000 denarë? Norma e kamatës është 8% *p. a (d)*, kurse kamatizimi është gjashtëmujorshe.

8. 4. N jehsimi i numrit të deponimeve dhe depoziti i fundit

Duke u thirrur në formulën për njehsimin e vlerës së fundit, $S_n = Vr\dfrac{r^n - 1}{r-1}$ për anticipativet dhe $S_n = V\dfrac{r^n-1}{r-1}$ për depozitat dekurzive, dihet shuma e fundit, depoziti i veçantë dhe norma e kamatës, mund të njehsohen numri i deponimeve n. Pikërisht, për deponimet anticipative vlen:

$$\frac{r^n-1}{r-1} = \frac{S_n}{Vr}$$

$$r^n - 1 = \frac{S_n(r-1)}{Vr},$$

përkatësisht

$$r^n = \frac{S_n(r-1)}{Vr} + 1.$$

Numri i deponimeve $\bar{u}$, mund të njehsohet vetëm nëse barazimi i sipërm logaritmohet. Atëherë, duke shfrytëzuar vetitë e logaritmit, kemi:

$$\log r^n = \log\left(1+\frac{S_n(r-1)}{Vr}\right)$$

$$n\cdot\log r = \log\frac{Vr+S_n(r-1)}{Vr}$$

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Vr+S_n(r-1)}{Vr}}.$$

Për njehsim më të lehtë, në vend të formulës së fundit, mund të logaritmizimi të kryhet duke zëvëndësuar pas zëvëndësimit të të dhënave te formula themelore për vlerën e fundit të borxhit.

Ngjashë, për për borxhin dekurziv kemi

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{V+S_n(r-1)}{V}}.$$

Vërejtje 1. Për normën e kamatës anticipative, njehsimet kryen sipas formulës përkatëse për vlerën e fundit të depozitave me kamatizim anticipativ.

1. Sa herë duhet të deponohet nga 10000 denarë në vit, në fillim të çdo viti, me 6% *p. a (d)* norma e kamatës dhe kamatizimi vjetor, nëse dëshirojmë të disponojmë me gjithsej 46371 denarë?

Depozitat janë anticipative. Faktori i kamatës dekurzive është

Atëherë,

$$1{,}06^n = \frac{46371(1{,}06-1)}{10000\cdot 1{,}06}+1 = 1{,}26248\,.$$

Duke logaritmuar me bazë 10, kemi $n\cdot\log 1{,}06 = \log 1{,}26248$ dhe prej këtu $n = 4$. Domethënë, duhet të deponojmë 4 vjet, përkatësisht 4 herë. ◆

2. Sa depozita gjysmëviti nga 35000 denarë duhet të paguhen, me kamatë 6% *p. a (d)* dhe kamatizim gjysmëviti, nëse ditën e pagesës së fundit na duhen edhe 401651 denarë?

Të vërejmë se pasi që njehsimi i vlerës së fundit është ditën e pagesë së fundit, depozitat janë dekurzive. Norma e kamatës relative është 3%, pra $r = 1{,}03$. Atëherë, $401651 = 35000\cdot\frac{1{,}03^n-1}{1{,}03-1}$, prej këtu $1{,}03^n = 1{,}34427$ dhe kemi $n = 10$. Domethënë, duhet të paguhen 10 deponime. ◆

3. Sa depozita gjithsej duhet të paguhen, nëse deponimi është tremujor dekurziv, me normën e kamatës 8% p.*a (d)* dhe kamatizim tremujor, por gjatë kësaj ddepoziti është 10000 denarë dhe të nevojshme janë 137200 denarë?

Për depozitin dekurziv vlen $137200 = 10000 \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ për $r = 1 + \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$. Atëherë, $1{,}02^n = 1{,}2744$ dhe kemi $n \approx 12$. Nëse përgjigjja ishte e saktë 12, atëherë do tç ishin të nevojshme 12 deponime, përkatësisht 3 vjet nga 4 deponime, por vlera e fituar është përafërsisht. Vlera e saktë është $n = 12{,}2446$. Kjo tregon se që të arrihet shuma e kërkuar të nevojshme janë 12 deponime. Atëherë 12 deponime do të jenë me sasinë e njohur prej 10000 denarë, por do të duhet të deponohet edhe depoziti i ri tremujor i cili do të dallohet dhe do të jetë me vlerë më të vogël. **Depoziti i fundit** është i ndryshueshëm prej të tjerëve dhe quhet **mbetja e deponimit.** ◆

Do ta nxjerrim formulën për njehsimin e vlerës së depozitit të fundit. Le të deponohen gjithsej n deponime, por n -1 deponim janë me vlerë të njëjtë V, kurse i fundit, depoziti n me vlerë $V_o \neq V$. Në boshtin kohor (fig. 5) do ta përshkruajmë situatën me deponimet anticipative

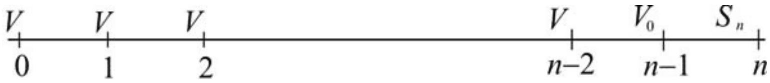


Fig. 5

Atëherë, për faktorin e kamatës dekurzive r kemi:

$$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + V_0 r\,,$$
$$S_n = Vr^2\left(r^{n-2} + \ldots + r + 1\right) + V_0 r\,.$$

Duke shfrytëzuar shumën e anëtarëve të progresionit gjeometrik, kemi

$$S_n = Vr^2\frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} + V_0 r\,,$$

por, prej këtu:

$$\boxed{V_0 = \frac{S_n}{r} - Vr\frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} = \frac{1}{r}S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}.$$

Vërejtja 2. Nëse shfrytëzojmë tabelat $i\,/\,i$, shprehja $\dfrac{1}{r}$ përgjigjet faktorit diskont të dhënë me tabelën II_p^1, kurse shprehja është pikërisht III_p^{n-1}. Atëherë për depozitin e fundit mund të shkruajmë:

$$\boxed{V_0 = S_n \cdot \mathrm{II}_p^1 - V \cdot \mathrm{III}_p^{n-1}}.$$

Vërejtja 3. Te detyrat, për numrin e deponimeve n merret numri i parë më i madh i plotë prej vlerës së fituar gjatë njehsimit, kuptohet kur n nuk është numër i plotë. Atëherë, $V_o < V$, n -1 depozita janë me vlerë V, kurse i fundit me vlerë V_o.

Në rastin e depozitave dekurzive, boshti i kohës duket si te fig. 6.

Fig. 6

Atëherë

$S_n = Vr^{n-1} + Vr^{n-2} + \ldots + Vr + V_0$,

Pra duke e rregulluar barazimin sipas V_0 dhe duke e përdor formulën për shumën e anëtarëve të progresionit gjeometrik, kemi:

$$\boxed{V_0 = S_n - Vr\frac{r^{n-1}-1}{r-1} = S_n - V\frac{r^n - r}{r-1}}.$$

Vërejtje 4. Duke shfrytëzuar tabelat i / i, mund të shkruajmë :

$$\boxed{V_0 = S_n - V \cdot \mathrm{III}_p^{n-1}}.$$

Kjo është formula për njehsimin e depozitit të fundit, i ndryshueshëm prej të tjerëve, gjatë deponimit dekurziv.

Vërejtje 5. Nëse kamatizimi është anticipativ, për depozizin e fundit fitohen këto formula: për deponimet anticipative kemi:

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{\rho}S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}},$$

dhe deponimet dekurzive

$$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}.$$

4. Sa deponime prej nga 8000 denarë semestrale janë të nevojshme, që për një semestër pas deponimit të fundit, vlera e fundit e deponimeve të jetë 60000 denarë. Kam,atizimi është gjashtëmujor, me normën e kamatës. Kamatizimi është gjashtëmujor, me normën e kamatës 10% p. *a (d).*

Kemi $r = 1 + \frac{10}{2 \cdot 100} = 1{,}05$. Vlera e fundit njehsohet gjashtë muaj sipas depozitit të fundit, Doemthënë deponimet janë anticipative dhe $60000 = 8000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1}$, përkatësisht $1{,}05^n = 1{,}35714$ dhe $n \approx 6{,}26$. Atëherë, do të marrim $n = 7$, përkatësisht do të kryedjmë pagesën e 6 depozitave nga 8000 denarë, por depozitin e fundit, do ta njehsojmë

Në veçanti $V_0 = \frac{60000}{1{,}05} - 8000\frac{1{,}05^7 - 1{,}05}{1{,}05 - 1} = 57143 - 57136 = 7$. Depoziti i fundit është 7 denarë. ◆

Vërejtje 6. Nëse depozitin e fundit e fitojmë sel vlerë negative. Kjo do të thotë se momenti i njehsimit të vlerës së fundit të depozitit, banka duhet ta kthen te kursyesi aq sasi.

Detyra për punë të pavarur

1. Sa depozita gjysmëviti anticipative prej 35000 denarë duhet të paguhen, që në fund të kemi 512389 denarë? Poashtu kamatizimi është gjysmëviti me normën e kamatës:

a) 6% p. *a (d)*; b) 6% *p. a (a).*

2. Sa herë duhet të deponohet sasia prej 235000 denarë, tremujore dekurzive, nëse në ditën e pagesës së fundit na duhen 2245438 denarë, me kushte të normës së kamatës të jetë 6% *p. a (d)* me kamatizim tremujor?

3. Sa deponime tremujore anticipative nga 1000 denarë janë të nevojshme, që së bashku me 6% *p.a (d)* kamatë të fitojmë shumën e fundit prej 40000 denarë? Kamatizimi është tremujore.

4. Sa është depoziti i fundit, nëse në fillim të çdo dy muajve deponojmë nga 1000 denarë dhe 2 muaj pas depozitit të fundit kemi 70000 denarë? Shkalla e kamatës është 12% *p. a (d)*, kurse kamatizimi është në çdo dy muaj.

5*. Sa duhet të deponohet në fillim të çdo viti nga 2000 denarë, nëse katër vitet pas depozitit të fundit ka nxjerrë 7000 denarë, por gjashtë muaj pas depozitit të fundit kanë ngel 80000 denarë? Norma e kamatës është 6% *p. a (d)*, kurse kamatizimi është vjetore. (Ke kujdes, depoziti është anticipativ, pra shuma njehsohet një herë në vit pas depozititi të fundit).

8. 5. Njehsimi i normës së kamatës gjatë deponimit

Prej formuilës për vlerën e fundit me kamatizim dekurziv $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$, nëse dihen vlerat për S_n dhe V, por është i panjohur faktori i kamatës r, përkatësisht norma e kamatës p% *p. a (d)*, fitohet barazimi

$$r^{n+1} - \left(\frac{S_n}{V} + 1\right) r + \frac{S_n}{V} = 0\,.$$

Ky është barazim polinomial me faktori *r,* që në rastin e përgjithshëm është prej shkallës më të lartë prej 3, kurse për barazimet e këtilla nuk ekziston metodë e njohur për zgjidhje, përveç në disa raste speciale të metodave numerike. Por, këtu qëllimi nuk është t'i mësojmë metodat numerike, por në dobi të detyrave praktike, më së lehti ta caktojmë normën e kamatës. Për këtë qëllim, njehsimi i normës së kamatës do ta bëjmë sipas formulës e cila shfrytëzon vlerat e tabelave *i / i*. Kështu,

$$\boxed{S_n = V \cdot \mathrm{III}_p^n}.$$

1. Me cilën normë të kamatës, borxhi semestral anticipativ prej 2000 denarë do të rritet deri në fund të vitit të gjashtë në 125000 denarë, nëse poashtu kamatizimi është semestral?

Te detyra e dhënë vlen $125000 = 2000 \cdot \mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{n}$, poashtu kemi gjithse $n = 16 \cdot 2 = 32$ pagesa.

Te tabelat $\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{n} = \dfrac{125000}{2000} = 62{,}5$ e kërkojmë vlerën 62,5 për $n = 32$.

Kjo vlerë nuk gjendet në tabelë, por ka dy vlera të përafërta $62{,}19536018 < 62{,}5 < 65{,}20952741$, e para përgjigjet për normën e kamatës 3,75%, kurse e dyta për 4%. Për të përcaktuar cila normë e kamatës ndërmjet këtyre dy të korenspondojnë 62,5 , është e nevojshme të kryhet interpolimi linear, që thjesht do ta bëjmë pasi të dhënat do t'i fusim në tabelë:

$\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$	$\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$
62,19536018	3,75	62,19536018	3,75
65,20952741	4	62,5	$\frac{p}{2}$

Prej këtu formojmë proporcion:

$$(4 - 3{,}75) : (65{,}20952741 - 62{,}19536018) = \left(\frac{p}{2} - 3{,}75\right) : (62{,}5 - 62{,}19536018),$$

përkatësisht $0{,}25 : 3{,}01416723 = \left(\frac{p}{2} - 3{,}75\right) : 0{,}30463982$. Në këtë mënyrë e interpelojmë intervalin intervalin e llogarisë së kamatës, në të njëjtën mënyrë sikurse qëndrojnë vlerat në tabelë.

Atëherë, $\frac{p}{2}-3,75=\frac{0,30463982\cdot 0,25}{3,01416723}=0,025$, përkatësisht p = 7,55% *p. a (d).*

Pasi që shfrytëzojmë dallime të vlerave, më së miri është tabelën ta zgjerojmë edhe me një rrsht te e cila do t'i shënojmë ndryshimet.

Diskutimin e njëjtë do ta realizojmë edhe për depozitat dekurzive. Prej vlerës së fundit edhe për depozitat dekurzive. Prej vlerës së fundit të depozitit $S_n = V\frac{r^n-1}{r-1}$, me transformimin e shprehjes për faktorin e kamatës kemi:

$$r^n-\frac{S_n}{V}r+\frac{S_n}{V}-1=0,$$

që është përsëri barazim polinomial sipasш *r*. Duke e shfrytëzuar formulën për vlerën e fundit të depozitave nëpërmjet vlerave prej tabelës *i/i*, $\boxed{S_n = V\left(1+\mathrm{III}_p^{n-1}\right)}$, kemi $\mathrm{III}_p^{n-1}=\frac{S_n}{V}-1=\frac{S_n-V}{V}$. Nëse $\frac{S_n-V}{V}$ vlera gjendet te tabelat për vlerën e njohur n-1, norma e kamatës lexohet direkt, në të kundërtën e fitojmë me inerpolimin lienar. ◆

2. Me clën normë të kamatës duhet të deponohet tremujore dekurzive, gjatë 5 vjetëve, nga 2000 denarë, për shumën e fundit të deponimeve kanë qenë 52000 denarë, nëse kamatizimi është kuartale?

Shqyrtojmë deponimin kuartal i cil ka gjithsej 20 pagesa, pra p = 20. Kemi $S_p = 52000$, $V = 2000$, por shfrytëzojmë $\frac{p}{4}$ normë të kamatës. Atëherë $52000 = 2000\left(1+\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}\right)$ dhe prej këtu $\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}=25$. Te tabelat, te pjesa për numrin 19, nuk e gjejmë vlerën e 25 , por i gjejmë 24,54244 te shtylla për 2,5% dhe 25,19739750 te shtylla për 2,75%. E formojmë tabelën:

$\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p	$\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p
24,54244	2,5%	24,54244	2,5%
25,19740	2,75%	25	$\frac{p}{4}$
0,65496	0,25%	0,45756	$\frac{p}{4}-2,5$

Formojmë proporcion $0{,}65496 : 0{,}25 = 0{,}45756 : \left(\dfrac{p}{4} - 2{,}5\right)$ dhe prej këtu kemi $p = 10{,}7\%$.♦

3. Para 6 vjetëve, personi ka deponuar 30000 denarë, por prej sot pra deri te 8 vjetët e ardhshme, në fund të çdo viti deponon nga 5000 denarë. Në fund të vitit të 8-të prej sot personi do të disponon me 47745 denarë. Me cilën shumë do të disponon personi pas 12 vjet prej sot nëse përdoret e njëjta normë e kamatës, gjatë deponimit vjetor?

Boshti i kohës do të fillon me - 6, që zeroja t'i përgjigjet momentit prej sot.

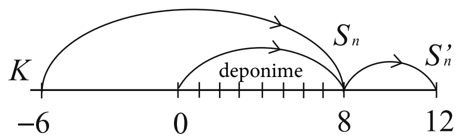


Fig. 7

Kemi $K = 30000$, $r = 1 + \dfrac{p}{100}$, $S_n = 47745$, $S_n = 5000\left(1 + \mathrm{III}_p^7\right)$.

Atëherë, $47745 = 5000\left(1 + \mathrm{III}_p^7\right)$, përkatësisht $\mathrm{III}_p^7 = 8{,}5491$, vlera e cila te tabel për n = 7 fitohet për p=5%. Tani, shuma e fundit prej të gjitha deponimeve pas 12 viteve prej tani është $S'_n = Kr^{18} + S_n r^4 = 30000 \cdot 1{,}05^{18} + 47745 \cdot 1{,}05^4 = 130233$ denarë. ♦

Detyra për punë të pavarur

1. Me cilën normë të kamatës kemi deponuar në fillim të çdo gjashtëmujorshi nga 20000 denarë, gjatë 2,5 vjet, nëse në fund të asaj periudhe disponojmë me 112658 denarë? Kamatizimi është gjashtëmujor.

2. Gjatë katër viteve kemi deponuar katër muja nga 5000 denarë, kurse në ditën e deponimit të fundit posedojmë 75000 denarë, Me cilën normë dekurzive kemi deponuar? Deponimi është katërmujore.

3. Me cilën normë të kamatës kemi deponuar vjetore nga 10000 denarë, që pas 20 vjetëve, gjatë kapitalizimit tvjetor, të kemi 260000 denarë, nëse deponimi është:

a) në fillim; b) në fund

të çdo viti?

4. Me cilën normë të kamatës, depoziti gjashtëmujor dekurziv prej 3000 denarë, në fund të vitit të gjashtëmbëdhjetë do të rritet në 188100, nëse kamatizimi është gjysmëviti?

5. Deponojmë depozitë tremujor anticpativ prej 5000 denarë, që në fund të vitit të tetë do të rritet në 312500 denarë. Cila është norma e kamatës nëse kamatizimi është tremujore dhe dekurzive?

8. 6. Të ardhurat periodike (rentat)

Në mënyrë të ngjashme sikurse te deponimet, mund të flasim për shuma të cilat merren në intervale kohore të caktuara. Për shembull, shuma e caktuar nuk nxirret menjëherë, por në shuma të caktuara, si sasi më të vogla gjatë periudhës kohore të dhënë, ku gjatë intervaleve kohore ndërmjet dy pranim,eve janë të barabarta. Nëse bëhet fjalë për pranime të barabarta në intervale kohore të barabarta, flasim për **rentën.** Këtu bëhet fjalë për renta të barabarta, përkatësisht **renta të përhershme.** Pasi sasia e renteve mund të ndryshon sipas ligjeve prej më prë të caktuar, sio për shembull, sipas ligjit të progresionit gjeometrik ose aritmetik, të njëjtit quhen **rente të ndrysueshme.** Mund të bëhet ndarja e renteve në shumë baza. Pra kështu, në lidhje me kohën e pagesës, rentë mund të pranohet në fillim të periudhës – **renta anticipative** ose në fund të periudhës – **renta dekurzive.** Në lidhje me kohëzgjatjen e pagesësave, renta mundet kohësisht të jetë **kohore** (në periudhë kohore të caktuar), **deri sa është jeta** (deri në fund të jetës së personit, por atëherë nuk varet vetëm prej faktorëlve finansiar) ose pra **e përjetshme,** nëse pranimi i rentës nuk ndalohet asnjëherë.
Në lidhje me periudhën për të cilën paguhet renta, dallojmë rente vjetore, gjysmëvjetore, tremujore, mujore dhe të ngjashme.

Deri sa zgjat renta, kamatizimi i mjerteve vazhdon, pra mundet periudhat e pranimeve të kamatizimeve të jetë më e shpeshtë ose më rrallë të mos puthiten (na do të shqyrtojmë vetë, rente të këtilla), por mundet kamatizimi të jetë më i shpeshtë ose më i rrallë prej pranimit të rentave.

Për pranimin e rentës, duhet paraprakisht të sigurohen mjete. Shuma e këtillë me qëllim të sigurohen të dhënat e rentës quhet **miza**. Bëhet fjalë për pagesë për një afat të mjeteve. Por, është e mundur mjetet të sigurohen edhe me pagesë periodike. Nëse pagesa e rentës fillon menjëherë pas deponimit të mizës, renta quhet jo e **drejtpërdrejt,** por nëse pagesa fillon pas periudhës kohore të caktuar pas pagesësë së mizës, renta quhet **renta e anulimit.**

Do të ndalemi te pagesa periodike, me sasi konstante, te të cilët kamatizimi puthitet me nxjerrjen e rentës. Norma e kamatës do të jetë dekurzive gjatë nxjerrje së formulave, por do të japim komentime koktrete për anticipativësituatën me kamatizimin e situatave me kamatizim anticitativ. Do t'i shfrytëzojmë këto simbole: M_n -miza, R -renta, n –numri i pagesave, r –faktori i kamatës dekurzive, p –faktori i kamatës anticipative.

8.6.1 Njehsimi i mizës

Do të shqyrtojmë, për fillim, rentë anticipativ me sasi R, që pranohet $\bar{u}$ herë, në fillim të çdo periudhe. Për njehsimin e mizës së nevojshme, duhet të dijmë se ajo i mbulon të gjitha rentat. Domethënë, ngjajshëm sikurse te vlera e fundit e deponimit, kur i mbledhim vlerat e kamatizuara të çdo depoziti të veçantë, këtu miza pranon si shumë të vlerave të diskontuara të çdo rente të veçantë. **Vlera e diskontuar** është në realitet vlera e tanishme e cila me kamatizim e arrin rentën e dhënë R . E paraqitur në boshtin e kohës, ajo do të duket në këtë mënyrë (fig. 8):

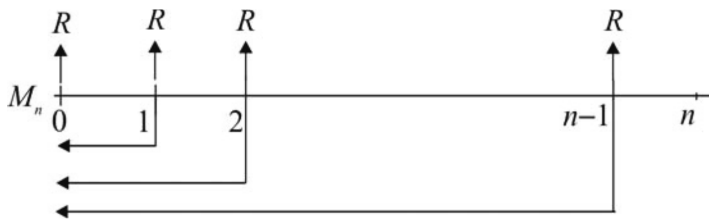


Fig. 8

Atëherë, te rasti anticipativ gjatë faktorit të kamatës r, për mizën kemi:

$$M_n = R + R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots + R\cdot\frac{1}{r^{n-1}}.$$

Pikërisht, renta e parë nuk diskontohet, ajo është pagesa në momentin e tanishëm, e dyta diskontohet për një periudhë e më tutje deri te renta e fundit e cila diskontohet për n -1 periudhë. Nëse e rregullojmë shprehjen, kemi:

$$M_n = R\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

Ku shuma në klapa është shuma e n anëtarëve të progresiont gjeometrik, ne anëtarin e parë 1, herësin $\frac{1}{r}$. Për dallim të depozitave, këtu në vend të faktorëve të kamatave, r figurojnë **faktorët e diskontit** $\frac{1}{r^k}$. Kemi $M_n = R\cdot\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = R\frac{r(r^n-1)}{r^n(r-1)}$. Atëherë, me formula $\boxed{M_n = R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}}$

njehsohet miza për rentën anticipative, më tutje ndryshe e quajtur vlera e tanishme e të gjitha pagesave të ardhshme.

Vërejtje 1. Ngjashëm sikurse te tabela e tretë *i / i* fitohet si shumë e vlerave prej tabelës së parë, kështu edhe tabela e katërtë *i / i* $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, fitohet si shumë në formë $\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-1}}$, përkatësisht $\mathrm{I}V_p^{n-1}=\mathrm{II}_p^1+\mathrm{II}_p^2+\ldots+\mathrm{II}_p^{n-1}$, që është shuma e vlerave të tabelës së dytë për të njëjtën normë të kamatës *p% p.a.(d)* dhe për perioda prej 1 deri *n* -1.

Prej këtu për mizën kemi formulën:

$$\boxed{M_n = R\left(1+\mathrm{I}V_p^{n-1}\right)}.$$

1. Sa shumë duhet të deponohet sot, që për katër vitet e ardhshme të pranojmë rentë, në fillim të çdo viti, prej 10000 denarë? Norma e kamatës është 6% *p. a (d)*, kurse kamatizimi është vjetore.

Duhet të njehsohet miza, nëse dihet se kemi gjithsej 4 renta për pranim, $n = 4$, me rentë R = 10000, me kamatizim vjetor, *m = 1* dhe faktor të kamatës dekurzive $1+\frac{6}{100}=1{,}06$.

Atëherë

$$M_n = R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)} = 10000\cdot\frac{1{,}06^4-1}{1{,}06^3(1{,}06-1)} = 36730$$

Vërejtja 2. Nëse kamatizimi është anticipative, atëherë faktori i kamatës është $\rho=\frac{100}{100-p}$, por për mizën vlen:

$$\boxed{M_n = R\frac{\rho\left(\rho^n-1\right)}{\rho^n(\rho-1)} = R\frac{\rho^n-1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}}.$$

2. Çfarë shume duhet të deponohet sot, që për 4 vitet e ardhshme të pranojmë rentë anticipative prej 10000 denarë? Norma e kamatës është 6% *p. a (a)*, por kamatizimi vjetor.

Ngjashëm si te detyra 1, por me faktor të kamatës $\rho=\frac{100}{100-6}=1{,}063829787$ me zëvëndësimin e formulës kemi mizën M_n = 36542 denarë. ◆

3. Sa mizë duhet të paguhet që gjatë 10 vjetëve të pranojmë rentë gjysmëviti prej 30000 denarë, nëse renta e parë paguhet menjëherë? Norma e kamatës është 10% *p.a (d)* me kamatizim gjysmëviti.

Pasi që pagesa e parë është menjëherë, punohet për rentën anticipative. Numri i pagesës është $n = 10 \cdot 2 = 20$, $R = 30000$, por $n = 10 \cdot 2 = 20$, $R = 30000$, Atëherë

$M_n = 30000 \cdot \dfrac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05^{19}(1{,}05 - 1)} = 392560$ denarë. ◆

Në rastin e rentës dekurzive në sasi R, e cila pranohet n herë, me faktorin e kamatës dekurzive r kemi

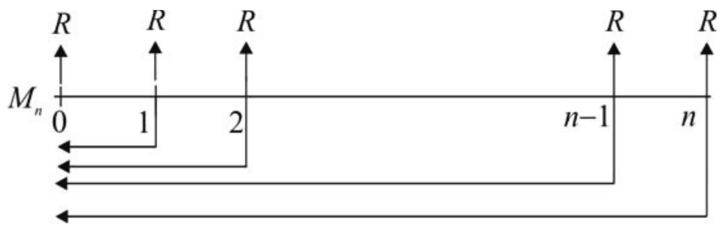


Fig. 9

Renta e parë paguhet në fund të periudhës së parë, pra e njëjta diskontohet për një periudhë. Renta e dytë diskontohet për dy periudha, kurse e fundit për n periudha.

Atëherë, $M_n = R\dfrac{1}{r} + R\dfrac{1}{r^2} + \ldots + R\dfrac{1}{r^{n-1}} + R\dfrac{1}{r^n} = R\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \ldots + \dfrac{1}{r^{n-1}} + \dfrac{1}{r^n}\right) = R\dfrac{1}{r}\dfrac{1 - \dfrac{1}{r^n}}{1 - \dfrac{1}{r}}$.

Tani, $\boxed{M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ është formula për njehsimin e mizës te renta dekurzive.

Vërejtje 3. Sipas diskutimit paraprak për tabelën e katërt *i / i*, formula për mizën është $\boxed{M_n = R \cdot \mathrm{I}V_p^n}$.

Vërejtje 4. Gjatë kamatizimi anticipativ, formula për mizën te renta dekurzive është $\boxed{M_n = R\dfrac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)}}$.

4. Fillojmë me pagesën e depozitit periodik gjatë 2 viteve, në fund të çdo tremujori. Dëshirojmë prej sot të fillojmë të pranojmë rentë tremujore prej 6000 denarë, në fillim të çpdo periudhe, gjatë 1,5 . Norma e kamatës është 8% *p.a(d)*, kurse kamatizimi është tremujore. Sa është depoziti periodik

T'i paraqesim deponmimet periodike dhe pranimet e boshtit kohor (fig. 10).

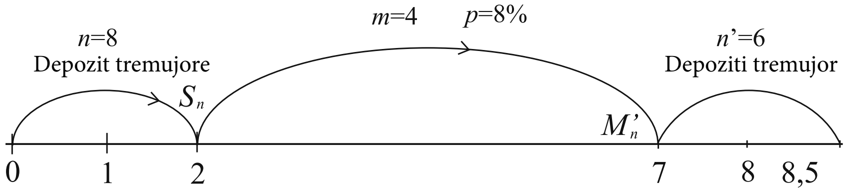


Fig. 10

Kemi $n=2\cdot 4=8$, $r=1+\dfrac{8}{4\cdot 100}=1{,}02$. Për shumën e deponimeve, në fund të vitit të dytë vlen $S_n=V\dfrac{r^n-1}{r-1}=\dfrac{1{,}02^8-1}{1{,}02-1}V=8{,}583V$. Shuma e fundit e depozitit kamatizohet 5 vjet, deri në momentin kur na duhet miza për pagesën e rentave. Miza është pikërisht kamatizimi i vlerës së S_n. Domethënë, $M'_n=S_n\cdot r^{5\cdot 4}=8{,}583V\cdot 1.02^{20}$, përkatësisht $M'=12{,}754V$, nga ana tjetër, sipas kushteve të dhëna, për rentat kemi $M'_n=R\cdot\dfrac{r^{n'}-1}{r^{n'-1}(r-1)}$, ku numri i rentave $n'=1{,}5\cdot 4=6$, $r=1{,}02$, $R=6000$ denarë. Atëherë $M'_n=6000\cdot\dfrac{1{,}02^6-1}{1{,}02^5(1{,}02-1)}=34281$ denarë. Nëse i barazojmë të dy barazimet e fituara për mizën, do ta fitojmë depozitin, përkatësisht 34281 = 12,754V dhe prej këtu $V=2688$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Çka paraqet renta periodike?

2. Çfarë lloje të rentave dallojmë sipas pagesave kohore?

3. Çfarë lloje të rentave dallojmë sipas kohës së pagesës?

4. Sa mizë është e nevojshme për rentën anticipative gjysmëvit prej 5000 denarë, e cila pranohet dhe e cila pranohet në kohpzgjatje prej 20 vite, nëse norma e kamatës është 6% p. *a (d*), kurse kamatizimi është gjysmëviti

5. Sa sasi duhet të deponohet sot, në kohëzgjatje prej 6 vjetë të pranojmë rentë vjetore prej 30000 denarë, nëse kamata është 4% *p. a (d*), me kamatizim vjetor, kurse renta është:

a) dekurzive; b) anticipative?

6. Sa mizë është e nevojshme që në 6 vitet e ardhshme të pranojmë rentë dekurzive, në fund të çdo tremujori, në lartësi prej 30000 denarë? Norma e kamatës është 2% *p. s (d*), por kamatizimi është tremujore?

7*. Sot janë deponuar 80000 denarë. Nga sa duhet të deponohet në fund të çdo muaji 9 muajët e ardhshëm, nëse dëshirojmë ditën e depozitit të fundit të fillojmë me pranimin e rentës anticipative mujore prej 7000 denarë, gjatë 10 viteve? Norma e kamatës është 12% *p. a(d),* kurse kamatizimi është mujore.

8*. Cila shumë duhet të deponohet para 2 vjetëve, që së bashku me ditën e sotshme 18000 denarët e deponuar, të sigurohet miza për pranimin e rentës mujore prej 5000 denarë, por në fund të çdo muaji duke filluar prej tani, pra në tre vitet e ardhshme? Norma e kamatës është 24% *p. a(d),* kurse kamatizimi është mujore.

8. 7. Njehsimi i vlerës së rentës

Le të dihet vlera e mizës M_n , kshtet e kamatizimit dhe pranimi i rentës, por nuk dihet sasia e rfentës që duhet të pranohet. Nëse renta është anticipative, për mizën vlen $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$.
Nëse madhësia e panjohur R , duke e shprehur prej formulës, për atë kemi:

$$\boxed{R = M_n \frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}},$$

që është formula për njehsdimin e rentës në rastin anticipativ.
Nëse renta është dekurzive, për mizën kemi $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, kurse prej këtu renta dekurzive do të pranohet sipas formulës:

$$\boxed{R = M_n \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}.$$

1. Sot janë deponuar 200000 denarë me 6% *p. a (d*) dhe kamatizimi semestral. Sa do të jetë renta semestrale që të pranon në 20 vitet e ardhshme, nëse renta është:

a) deklurzive; b) anticipative?

Miza prej $M_n = 200000$ denarë duhet të siguron pagesë gjithsej $n = 20 \cdot 2 = 40$ renta, me sasi R . Faktori i kamatës dekurzive është $r = 1 + \dfrac{6}{2 \cdot 100} = 1{,}03$.

a) Në rastin e rentës dekurzive, kemi $R = 200000 \cdot \dfrac{1{,}03^{40}(1{,}03 - 1)}{1{,}03^{40} - 1} = 8652{,}5$ denarë.

b) Tani, nëse renta është anticipative fitohet

$$R = 200000 \cdot \frac{1{,}03^{39}(1{,}03-1)}{1{,}03^{40}-1} = 8400{,}5 \text{ denarë.} \blacklozenge$$

Vërejtje 1. Në rastin e kamatizimit të jetë anticipative, për rentën anticipative vlen:

$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n-1}},$$

ku ρ është faktor i kamatës anmticipative.

Vërejtje 2. Në renta e normës anticipative është anticipative, për rentën dekurzive fitohet

$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n}(\rho-1)}{\rho^n-1}}.$$

2. Nëse keni paguar sasi prej 120000 denarë dy vkjet me normë të kamatës 5% *p. a (d)* me kamatizim semestral, atëherë sa është renta gjysmpvit gjatë 4 viteve, në fillim të çdo gjysmëpviti, duke filluar prej sot?

Kemi K = 120000 r = 1,025, $n = 4 \bullet 2 = 8$. Gjatë këtyre kushteve, pasi renta prtanohet në fillim të çdo gjysmëviti, prej formulës për rentën anticipative fitohet:

$$R = M_n \frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n-1} = M_n \frac{1{,}025^7(1{,}025-1)}{1{,}025^8-1} = 0{,}136 M_n.$$

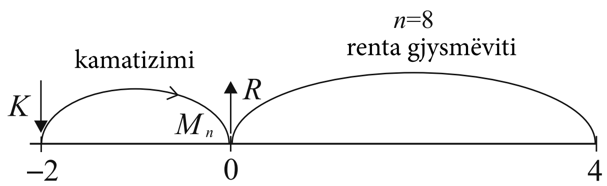


Fig. 11

Në boshtin kohor mund të vërejmë se renta është anuluar për dy vjet, pra shuma prej 120000 denarë do të zmadhohet deri në momentin kur d të shfrytëzohet si miza (fig. 11). Domethënë, $M_n = K \cdot r^{2\cdot 2} = 120000 \cdot 1{,}025^4 = 132457{,}5$ dhe $R = 0{,}136 \cdot 132457{,}5 = 18014$ denarë. ◆

3. Prej sot, pra në dy vitet e ardhshme, depononi në fund të çdo tremujori nga 3000 denarë. Sa rentë mund të sigurohet prej këtyre depozitave, nëse duhet të pranojmë në kohëzgjatje prej 2 vjet me fillim një vit pëas depozitit të fundit, në fillim të çdo tremujori, por gjithashtu shtatë vjet prej sot të na ngelin 12000 denarë? Norma e kamatës është 8% *p. a (d)*, kurse kamatizimi është tremujore.

Ta vizatojmë edhe boshtin kohor (fig. 12).

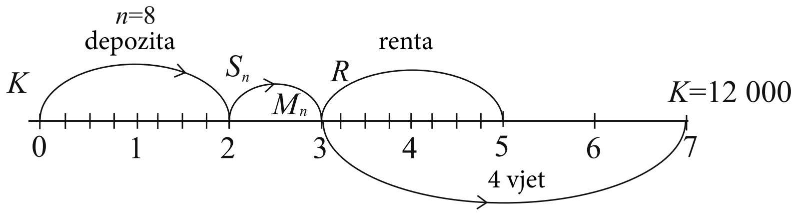


Fig. 12

$V_{dq}=3000$, $\quad n=2\cdot 4=8$, $\quad r=1+\dfrac{8}{4\cdot 100}=1{,}02$ dhe $S_n=V\dfrac{r^n-1}{r-1}=3000\cdot\dfrac{1{,}02^8-1}{1{,}02-1}=25749$ denarë. Kjo shumë kamatizohet për një vit dhe i siguron rentet dhe vlerat e diskontinuara të mbetjes prej 12000 denarë. Atëherë, mund të shkruajmë barazim $S_n r^4=M+12000\cdot\dfrac{1}{r^{4\cdot 4}}$. Shumën 12000 denarë e diskontuojmë për 4 vjet me nga 4 periudha vjetore. Atëherë $S_n r^{20}=Mr^{16}+12000$. Nëse mizën e shënojmë me M, ajo i përgjigjet rentës anticipative tremujore, e cila paguan 8 herë, pra kemi $M=R\dfrac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}=R\dfrac{1{,}02^8-1}{1{,}02^7(1{,}02-1)}=R\cdot 7{,}472$. Me zëvëndësimin te shprehja lartë fiktohet $25749\cdot 1{,}02^{20}=R\cdot 7{,}472\cdot 1{,}02^{16}+12000$, përkatësisht $R=\dfrac{25749\cdot 1{,}02^{20}-12000}{7{,}472\cdot 1{,}02^{16}}=2560$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Posa paguam mizë prej 100000 denarë. Sa rentë dekurzive gjysmëviti 8 vitet e ardhshme mund të pranojmë, nëse norma e kamatës është 3% *p.a(d)* me kamatizim gjysmëviti? Sa rfentë mujnd të pranojmë, nëse kamatizimi ësht anticipative me të njëjtën normë të kamatës prej 3% p. *a (a)*?

2. Nëse sot deponohen 150000 denarë, sa rentë mund të pranojmë 2,5 vitet e ardhshme, në fund të çdo tremujori me normë të kamatës 8% *p. a (d)* dhe kamatizim tremujor?

3. Sot deponojmë 90000 denarë, por pas tre vjet do të fillojmë të pranojmë rentë tremujore anticipative, në pesë vitet e ardhshme. Sa është rfenta, nëse norma e kamatës është 10% *p. a(d),* por kamatizimi tremujor?

4*. Personi ka deponuar prej moshës së tij 33 vjeçare deri në fillim të moshës 38 vjçare, në fillim të çdo gjysmëvit, nga 4800 denarë. Sa rentë dekurzive mund të pranon personi në fund të çdo gjysmëviti prej moshës së tij 41 vjeçare deri në moshën 48 vjeçare. Norma e kamatës është 6% *p. a (d)* me kamatizim gjysmëviti.

5. Para dy vjet kemi deponuar 12000 denarë, por 2,5 vitet e ardhshme duhet të pranojmë rentë në fund të çdo gjysmëviti. Sa është renta, nëse norma e kamatës është 5% *p.a(d)* me kamatizim gjysmëviti?

8. 8. Njehsimi i numrit të mbetjes së rentes

Ndërmjet madhësive te formula për njehsimin e mizës, figuron edhe numri i renteve të cilat pranohen. Nëse dihet miza, renta dhe norma e kamatës, mundemi ta shprehim numrin e renteve të cilat pranohen. Për rentat anticiptive, sipas formulës për mizën kemi $M_n = R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)} = Rr\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$. Do të kryejmë disa transformacione ekuivalente të barazimit:

$$\frac{M_n(r-1)}{Rr} = 1-\frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n} = 1-\frac{M_n(r-1)}{Rr} = \frac{Rr-M_n(r-1)}{Rr},$$

$$r^n = \frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}.$$

Barazimin e fituar do ta logaritmizojmë, $\log r^n = \log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}$, por prej vetive të logaritmeve kemi:

$$n\cdot\log r = \log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}.$$

Atëherë,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}}$$

është formula për njehsimin e numrit të renteve.

1. Është deponuar miza prej 129442, me normë të kamatës 4% p. *a (d)* me kamatizim semestral. Sa rente semestrale nga 12000 denarë mund të paguhen, nëse renta e parë pranohet menjëherë?

Së pari të vërejmë se pasi renta e parë pranohet menjëherë, punohet për rentën anticipative. E dim se $M_n = 129442$, $r = 1+\frac{4}{2\cdot 100} = 1{,}02$, $R = 12000$.

Atëherë për numrin e renteve kemi:

$$n=\frac{1}{\log 1{,}02}\cdot\log\frac{12000\cdot 1{,}02}{12000\cdot 1{,}02-129442\cdot(1{,}02-1)}=116{,}277\cdot\log 1{,}268241=12\,.\blacklozenge$$

Vërejtje 1. Nëse norma e kamatës është anticipative, atëherë për depozitin anticipativ për numrin e renteve vlen:

$$\boxed{n=\frac{1}{\log\rho}\cdot\log\frac{R\rho}{R\rho-M_n(\rho-1)}},$$

për $\rho=1+\frac{100}{100-p}$, faktorin e kamatës anticipative.

2. Sot depononi 140000 denarë në kursimoren e cila paguan 5% *p.a(d)* kamatë, me kapitalizim vjetor. Sa herë mundet të pranoni rentë vjetore anticipative prej 10000 denarë?

kemi $M_n=140000$, $R=10000$ dhe $r=1+\frac{5}{100}=1{,}05$ për atë

Vlera e fituar nuk është numër i plotë. Ngjajshëm sikurse te depozitat, kjo tregon se me 22 rentet e paguara, mza akoma nuk është shpenzuar, por nuk është e mundshme pra edhe të paguhen 23 rentat e barabarta nga 10000 denarë. Atëherë numri i renteve është n umri i parë natyror më i madh se numri i fituar, por gjithashtu 22 rentet janë të barabarta, por e fundit, e 23-ta është e ndryshme.

Fig. 13

Do ta japim formulën për **rentën e fundit** ose të ashtuquajturën **mbetje të rentës.**
Ta shënojmë rentën e fundit me R_0. Atëherë boshti kohor është dhënë në fig. 13.
Duke i diskontuar rezultatet e fundit, për mizën kemi:

$$M_n=R+R\cdot\frac{1}{r}+R\cdot\frac{1}{r^2}+\ldots+R\cdot\frac{1}{r^{n-2}}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}=R\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-2}}\right)+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\,.$$

Shprehja në kllapa është shuma e n -1 anëtarëve të progresionit gjeometrik, pra kemi:

$$M_n=R\cdot\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}=R\cdot\frac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\,.$$

Atëherë,

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R \cdot \frac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}\left(r-1\right)} \right] \cdot r^{n-1}}.$$

Vërejtje 2. Shprehja e fundit, e shkruar nëpërmjet vlerave të tabelës së katërtë dhe të partë i / i, fiton formën:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R \cdot \left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-2}\right)\right] \cdot \mathrm{I}_p^{n-1}},$$

ku $1 + \mathrm{I}V_p^{n-2} = \dfrac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}\left(r-1\right)}$.

Te shembulli jonë, ku $n = 23$ kemi:

$$R_0 = \left[140000 - 10000 \cdot \frac{1{,}05\left(1{,}05^{22}-1\right)}{1{,}05^{22}\left(1{,}05-1\right)} \right] \cdot 1{,}05^{22} = 5231{,}75 \text{ denarë.}$$

Mbetja e rentës gjithmonë është më i vogël se sasia e rentës.

Le të jetë dhënë vargu M_n, renta dekurzive R e cila poashtu n herë, si edhe faktori i kamatës dekurzive r. Me transformimin e shprehjes për mizën kemi

$$\frac{M_n}{R}\left(r-1\right) = 1 - \frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n} = 1 - \frac{M_n}{R}\left(r-1\right) = \frac{R - M_n\left(r-1\right)}{R},$$

dhe prej këtu

$$r^n = \frac{R}{R - M_n\left(r-1\right)}.$$

Duke logaritmuar kemi:

$$\log r^n = \log \frac{R}{R - M_n\left(r-1\right)},$$

Përkatësisht.

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{R}{R - M_n\left(r-1\right)}}.$$

Vërejtje 3. Nëse norma e kamatës së dhënë është antipacitive, atëherë për numrin e rfentës vlejnë:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R}{R - M_n\left(\rho-1\right)}}.$$

Në situatën kur n është nujmër i plotë, atëherë ai është numrë i renteve të cilat mund të pranojnë, nël të kundërtën për numrin e renteve e marrim numrin e parë natyror, më të madh se i fituari. Gjithashtu te renta anticipative, edhe këtu mund të njehsohet mbetja e rentës R_0 (fig. 14).

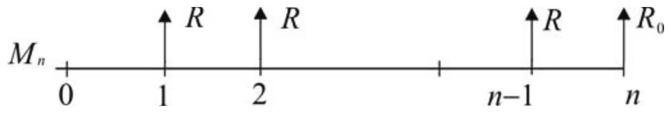


Fig. 14

Duke diskontuar rentet, për mizë kemi:

$$M_n = R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots + R\cdot\frac{1}{r^{n-1}} + R_0\cdot\frac{1}{r^n} = R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) + R_0\cdot\frac{1}{r^n}.$$

Duke njehsuar shumën në kllapa si shumë të progresionit gjeometrik me anëtarin e parë $\frac{1}{r}$ dhe herësin $\frac{1}{r}$,kemi:

$$M_n = R\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}} + R_0\cdot\frac{1}{r^n} = R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)} + R_0\cdot\frac{1}{r^n}.$$

Atëherë,

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]\cdot r^n}$$

Është formula për njehsdimin e mbetjes së rentës te renta dekurzive.

Vërejtja 4. Pasi shprehja $\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ me zëvëndësimin $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, për mbetjen e rentës kemi: $\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]\cdot \mathrm{I}_p^n}$, duke shfrytëzuar tabelat *i/i*.

Vërejtja 5. Prej formulave të fituara për mbetjen e rentës, me zëvëndësimin e faktorit të kamatës r me anticipativin ρ , do të fitohen formulat përkatëse gjatë kamatizimit anticipativ.

3. Sot deponojmë 280000 denarë si miza për rentën dekurzive vjetore prej 20000 denarë. Sa renta mund të pranojmë, nëse norma e kamatës është 5% *p. a {d)* me kamatizim vjetor? Sa është renata e fundit?

I kemi këto të dhëna: miza M_n = 280000, renta R = 20000 , r = 1,05, nëse dëshirojmë ta caktojmë numrin e rentave n. Sipas formulave të nxjerra kemi:

$$n = \frac{1}{\log 1{,}05}\cdot\log\frac{20000}{20000-280000\cdot(1{,}05-1)} = 24{,}6765.$$

Atëherë numri i rentave mund të pranohen është n = 25, por 24 të parat janë me vlerë 20000, por renta e fundit është e ndryshueshme dhe me vlerë më të vogël se 20000 denarë. Për mbetjen e rentës kemi:

$$R_0 = \left[280000 - 20000 \cdot \frac{1{,}05^{24} - 1}{1{,}05^{24}(1{,}05-1)}\right] \cdot 1{,}05^{25} = 13637{,}4 \text{ denarë.} \blacklozenge$$

Detyra për punë të pavarur

1. Sot janë deponuar 910122,27 denarë, por prej sot e tutje do të pranojmë rentë në fund të çdo tremujori në në lartësi prej 100000 denarë. Sa renta mund të pranojmë, nëse nporma e kamatës është 7% *p. a (d)*, kurse kamatizimi është tremujor?

2. Sa renta gjysmëvjetori anticipative prej 50000 denarë mund të paguhen nëse sot është deponuar miza prej 339318,67 denrë? Norma e kamatës është 10% *p. a (d)*, por kamatizimi gjysmëviti.

3. Sa herë mund të pranojmë rfentë semestrale dekurzive prej 50000 denarë, prej sot e më tutje, nëse sot keni deponuar 500000 denarë, me normën e kamatës prej 5% *p. a (d)* dhe klamatizimi semestral? Sa është mbetja e remtës?

4. Sa herë mund të pranojmë rentë tremujore dekurzive prej 40000 denarë të llogarisë së mizës së deponuar prej 1300000 denarë? Norma e kamatës është 9% *p. a (d)*, kamatizimi tremujor. Sa është mbetja e rentës?

5. Sot keni deponuar 120000 denrë dhe prej sot filloni të pranoni rentë gjysmëviti anticipative prej 4800 denarë, me normën e kamatës 4% *p.a (d)* dhe kamatizim gjysmëviti. Sa renta mund të pranoni dhe sa është mbetja e rentës?

8. 9. Njehsimi i normës së kamatës te rentat periodike

Norma e kamatës, kur dihen madhësitë tjera prej formulës për miza, $M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)$ për rentën anticipative dhe $M_n = R \cdot \mathrm{I}V_p^n$ për rentën dekurzive, njehsohet si madhësi e panjohur.

1. Me cilën normë të kamatës duhet të depononi 600000 denarë, që për 25 vjet, ku kamatizimi vjetor i rentës anticipative prej 50000 denarë?

Do ta zhvillojmë në fillim formulën themelore për mizën te renta anticipative, me qëllim të vini deri te vlera e faktorit të kamatës dekurzive *r*,

$M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$, por duke rregulluar shprehjen bëhet

$(M_n - R)r^n - M_n r^{n-1} + R = 0$.

Barazimi i fundit sipas r, të shkallë më së shpeshti më të madhe se 4, barazime për të cilat patjetër të shfrytëzohen metoda numerike për tu zgjidhur. Por, duke shfrytëzuar formulën $\boxed{M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)}$, duke lexuar tabelat finansiare për $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, lehtë mund të caktohet norma e kamatës p, por nëse vlera për $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, nuk është te tabelat, zbatohet interpelavioni linear, sikurse te kaata e përbërë edhe te depozitat.

Konkretisht, përf detyrën 1 kemi M_n = 600000 , R = 50000, n = 25. Atëherë 600000 = 50000 $\cdot \left(1 + \mathrm{I}V_p^{24}\right)$ dhe prandaj $\mathrm{I}V_p^{24}$ = 11. Te tabelat për $\mathrm{I}V_p^{24}$ nuk e gjemë vlerën 11 për asnjë normë të kamatës, por gjejmë dy vlera më të afërta, por ato janë 10,9830 < 11 < 11,4693, ku $\mathrm{I}V_{7,5}^{24}$, = 10,9830 dhe $\mathrm{I}V_7^{24}$ = 11,4693 . e formojmë tabelën:

$\mathrm{I}V_p^{24}$	p	$\mathrm{I}V_p^{24}$	p
10,9830	7,5	10,9830	7,5
11,4693	7	11	p
0,4863	– 0,5	0,017	$p - 7{,}5$

Prej proporcionit 0,4863 : (– 0,5) = 0,017 : (p – 7,5) kemi $p = \dfrac{-0{,}5 \cdot 0{,}017}{0{,}4863} + 7{,}5 = 7{,}482\%$.

Norma e kamatës së kërkuar është 7,482%. ◆

2. Personi ka pranuar rentë prej 60000 denarë, në fund të çdo gjysmëviti, gjatë 5 viteve. Cila normë e kamatës ka qenë e zbatuar, nëse kamatizimi është gjysmëviti, por gjashtë muaj para zbatimit të parë renta e deponuar është miza prej 463302 denarë?

Flasim për rentën dekurzive në sasi R = 60000, me mizë M_n = 463302, e cila zbatohet n = 5 • 2 = 10 herë. Sipas formulës për mizë te renta dekurzive kemi $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$. Nëse e transformojmë barazimin sipas faktori të kamatës dekurzive r, kemi barazimin $M_n r^{n+1} - (M_n + R)r^n + R = 0$. Te shembulli ynë, ky barazim është i shkallës 11, për të cilën nuk ka mënyrë të zakonshme për zgjidhje. Prandaj shfrytëzojmë formulën për mizën nëpërmjet tabelave finansiare $M_n = R \cdot \mathrm{I}V^{n}_{\frac{p}{2}}$, është norma e kamatës relative për një gjysmëviti. Domethënë, $463302 = 60000 \cdot \mathrm{I}V^{10}_{\frac{p}{2}}$ dhe prej këtu $\mathrm{I}V^{10}_{\frac{p}{2}} = 7{,}7217$. Te tabelat, për n = 10 numri 7,7217 gjendet për $\frac{p}{2} = 5\%$. Atëherë norma e kamatës vjetore nominale është 10% *p. a (d).*◆

3. Me cilën normë të kamatës duhet të deponojmë 120000 denarë, që gjatë 12 vjet e 6 muaj, gjatë kapitalizimit gjysmëviti, pranojmë rentë gjysmëviti dekurzive prej 10000 denarë?

Duke zëvëndësuar te formula M_n = 120000, R = 10000 dhe numri i rentave n = 12,5 • 2 = 25, kemi $120000 = 10000 \cdot \mathrm{I}V^{25}_{\frac{p}{2}}$, përkatësisht $\mathrm{I}V^{25}_{\frac{p}{2}} = 12$. Te tabela e katërtë *i* / *i*, për n = 25 nuk e gjejmë numrin 12, por gjejmë numra tjerë ndërmjet të cilëve është vendosur numri 12, por ato janë 12,1979 për normën e kamatës prej 6,5% dhe 11,6536 për normën e kamatës prej 7% .

Do t'i fusim të dhënat te tabela dhe do të interpelojmë.

$\mathrm{I}V^{25}_{p/2}$	$p/2$	$\mathrm{I}V^{25}_{p/2}$	$p/2$
11,6536	7	11,6536	7
12,1979	6,5	12	$p/2$
0,5443	– 0,5	0,3464	$p/2-7$

Prej 0,5443: (– 0,5)= 0,3464: *(p* /2 – 7,5) kemi $\frac{p}{2} = \frac{-0{,}5 \cdot 0{,}3464}{0{,}5443} + 7 = 6{,}682\%$.

Norma e kamatës vjetore nominale është 13,364% *p. a (d).* ◆

4. Prej sot pra gjatë dy viteve, deponojmë nga 16000 denarë në fund të çdo tremujori. Pas tre vjet prej sot duhet të tërheqim një lloj shume, por vetëm aq që pas pesë vjet të kemi mizë prej 30840 denarë. Mizën do ta shfrytëzojmë që gjatë 2,5 vjedt pranojmë rentë prej 4000 denarë, tremujori dekurziv. Cila shumë duhet të tërhiqet pas tre vjet prej sot? Norma e kamatës është e njëjtë për tërë periudhn kohore.

Dy vjet deponohet, por nuk mund të njehsojmë shumën e fundit të depozitit pasi norma e kamatës nuk është e njohur. Por, kemi edhe të dhëna për rentën prej të cilës mund të fitojmë normë të kamatës. Do t'i përcjellim të dhënat në boshtin kohor dhe do t'i vendosim barazimet.

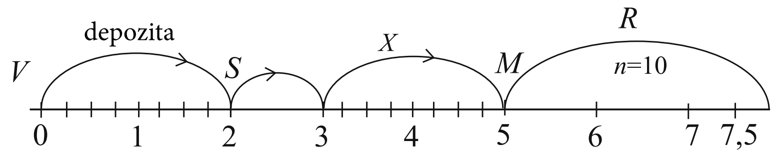


Fig. 15

Shuma e fundit të depozitit S kamatizohet një vit, tërhiqen mjete në sasi X, dhe mbetja kamatizohet edhe dy vjet. Në momentin 5 vjet prej sot, sasia në bankë i përgjigjet mizës për rentën e cila vijon. Domethënë, $\left(S \cdot r^4 - X\right) \cdot r^8 = M$. Ta njehsojmë së pari normën e kamatës. Për mizën vlen $M = R \cdot \mathrm{I}V_{\frac{p}{4}}^{n}$, ku n është numri i rentës, por në këtë rast ato janë gjithsej $n = 2{,}5 \cdot 4 = 10$ renta. Atëherë, $\mathrm{I}V_{\frac{p}{4}}^{n} = 7{,}71$. Vlera e fituar te tabela i përgjigjet norma e kamatës $\frac{p}{4} = 8\%$. Atëherë $p = 32\%$ $p.a(d)$. Prej këtu, $r = 1 + \frac{32}{4 \cdot 100} = 1{,}08$ dhe mund të zëvëndësojmë te barazimi ku është shuma e panjohur X.Depoziti është dekurziv dhe prandaj $S = 16000\frac{1{,}08^8 - 1}{1{,}08 - 1} = 170186$ denarë. Kemi $\left(170186 \cdot 1{,}08^4 - X\right) \cdot 1{,}08^8 = 30840$, prej ku $231536 - X = 16662$, përkatësisht $X = 231536 - 16662 = 214874$ denarë.
Shumën të cilën duhet ta tërhiqim është 214874 denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Gjatë dhjetë vjet, në fillim të çdo tremujori, kemi pranuar rentë prej 10000 denarë. Nëse, në ditën e zabatimit të parë të rentës kemi deponuar 200000 denarë, që norma e kamatës me kamatizim tremujor është e zbatueshme?

2. Me cilën normë të kamatës duhet të deponohen 70000 denarë që të mundet gjatë 12 viteve të pranojmë rentë tremujore anticipative prej 2000 denarë? Kamatizimi është tremujor.

3. Me cilën normë të kamatës duhet të deponohet miza prej 45216 denarë, që[të sigurohet gjatë gjashtë viteve të pranojmë rentë gjysmëviti dekurzive prej 6000 denarë gjatë kamatizimit të gjysmëvitit?

4. Personi ka deponuar 36000 denarë dhe gjatë pesë viteve do të pranon rentë katërmujore anticipative prej 4500 denarë. Cila normë e kamatës, me kamatizim katërmujor është përdor?

5*. Cilën shumë e kemi deponuar para një viti, nëse sot kemi 45000 denarë dhe fillojmë ta zbatojmë rentën prej 5000 denarë në fund të çdo dy dy muajve, me kamatizim dymujor, në kohëzgjatje prej 2 vjet?

8. 10. Detyra të kombinuara *

Do të ndalemi te disa shembujj të zgjidhur te të cilat përdoren tabelat *i/i*. Shembujt e përmendur janëkombinim i përbërë të depozitave, renteve dhe klamatizimi i përbërë.

1. Sa kapital fillestar duhet të paguajmë sot, që duke filluar pesë vjet prej sot dhe me kohëzgjatje prej 6 vjet, praojmë renta tremujore anticipative prej 9000 denarë. Dy vitet e para të normës së kamatës është 6% *p.s (d)* me kamatizim mujor, tre vitet e ardhshme është 10% *p. a (a)* me kamatizim kuartal, kurse gjashtë vitet e fundit norma e kamatës është 4% *p.q (d)* (fig. 15).

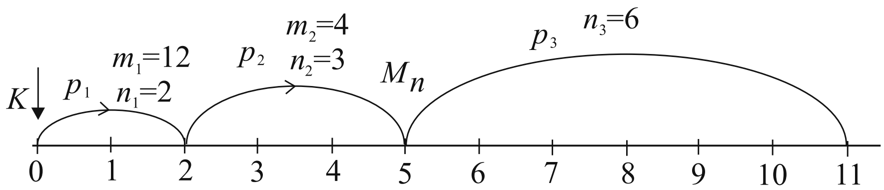


Fig. 16

Miza për rentën është pikërisht vlera e kamatizuar e kapitallit fillestar. Për periudha të ndryshme ka faktor të ndryshëm të kamatës dhe atë:

- dy vitet e para të kamatizimit 2 • 12 = 24 herë me $r = 1 + \frac{2 \cdot 6}{12 \cdot 100} = 1{,}01$,

- tre vitet e ardhshme, kamatizim 3 • 4 = 12 herë me $\rho = \frac{100}{100 - \frac{10}{4}} = 1{,}02564$,

- te njehsimet për rentat pranojmë gjithsej 6 • 4 = 24 renta, me normë të kamatës tremujore relative prej 4%, përkatësisht me $r' = 1{,}04$.

Atëherë, $K \cdot r^{24} \cdot \rho^{12} = M_n$, ndërsa $M_n = R \cdot r' \frac{r'^{24} - 1}{r'^{24}(r' - 1)}$. Duke zëvëndësuar të panjohurat vlerat dhe duke barazuar të dy shprehjet kemi barazim:

$$K \cdot 1{,}01^{24} \cdot 1{,}02564^{12} = 9000 \cdot 1{,}04 \frac{1{,}04^{24} - 1}{1{,}04^{24}(1{,}04 - 1)},$$

përkatësisht 1,72K = 142712, prej ku për shumën e cila duhet të paguhet sot, kemi K = 82972. ◆

2. Në bankë paguajmë mizë në sasi 780000 denarë. Sa rentë mujore mund të pranojmë gjatë 10 viteve, nëse norma e kamatës, sipas marrëveshjes është 6% p. *a (d)* gjatë 4 viteve të para dhe 8% p. *a (d)* në 6 vitet e ardhshme? Kapitalizimi është mujor, por renta e parë pranohet një muaj pas pagesësë së mizës.

Së pari vërejmë se bëhet fjalë për rentën dekurzive, duke pasur parasysh se pagesa e parë është në fund të muajit. Për normat e kamatve të ndryshme, mund të llogarisim për 4 muajt e parë paguhet një, kurse pastaj 6 vjet tjetër rentë, me të njëjtën sasi, por me mizë të ndryshme (fig. 17).

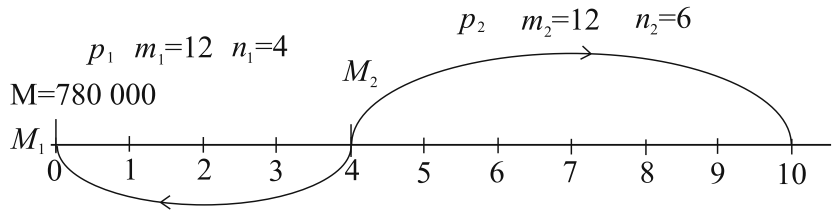


Fig. 17

Miza e nevojshme për 4 vitete e para është $M_{1,}$ por për 6 vitet e ardhshme është $M_{2.}$ Miza e cila është paguar është shumë e M_1 dhe vlerës së diskontuar të M_2. Poashtu, renta e parë paguhet 4 •12 = 48 herë, me faktorin e kamatës dekurzive $r_1 = 1 + \dfrac{6}{12 \cdot 100} = 1{,}005$ dhe miza është $M_1 = R \cdot \dfrac{1{,}005^{48} - 1}{1{,}005^{48}(1{,}005 - 1)} = 42{,}580R$. Renta e dytë paguhet $6 \cdot 12 = 72$ herë, me faktorin e kamatës dekurzive $r_2 = 1 + \dfrac{8}{12 \cdot 100} = 1{,}00667$ pra miza është $M_2 = R \cdot \dfrac{1{,}00667^{72} - 1}{1{,}00667^{72}(1{,}00667 - 1)} = 57{,}028R$. Atëherë, $M = M_1 + M_2 \cdot \dfrac{1}{r_1^{4 \cdot 12}}$, përkatësisht $780000 = 42{,}580R + 57{,}028R \cdot 1{,}005^{-48}$, prej ku për vlerën e rentës mujore kemi R = 8917 denarë. ◆

3. Sa depozit mujor duhet të paguhet gjatë 6 viteve, në fillim të çdo muaji, nëse dëshirojmë gjatë 9 viteve të pranojmë rentë tremujore në sasi prej 18000 denarë? Ndërmjet depozitit të rentës së fundit dhe të parë do të kalojnë 6 vjet dhe 1 muaj. Norma e kamatës është 8% *p. a(d),* por kamatiozimi është mujor gjatë 6 viteve të para, por pastaj tremujore (fig. 18).

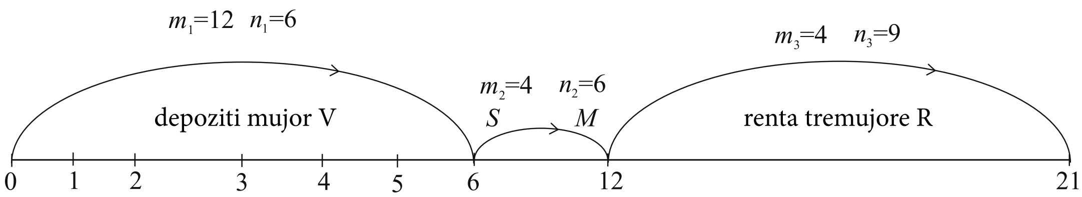


Fig. 18

Nuk dihet sasia e depozitit të veçant V. Depoziti paguhet gjithsej 6 · 12 = 72 herë, anticipativno. Në fund të vitit të gjashtë njehsohet shuma e fundit të depozitit S, me faktorin e kamatër $r_1 = 1 + \frac{8}{12 \cdot 100} = 1{,}00667$. Atëherë,

$$S = V \cdot r_1 \frac{r_1^{72} - 1}{r_1 - 1} = V \cdot 1{,}00667 \frac{1{,}00667^{72} - 1}{1{,}00667 - 1} = 92{,}65V .$$

Shuma S kamatizohet prej momentit kur e paraqet mizën. Ndërmjet depozititi të fundit dhe pagesës së rentës kalojnë 6 vite dhe 1 muaj, por S jehsohet një muaj pas depozititi të fundit. Diomethënë, ngel të kmatizohen 6 vite. Atëherë $M = S \cdot r_2^{6\cdot 4}$, prandaj që sipas llogarisë së shumës S kamatizimi është tremujor. Atëherë, për faktorin e kamatës r_2 kemi $r_2 = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$. Domethënë, për mizën vlen $M = S \cdot 1{,}02^{24} = 92{,}65 \cdot 1{,}02^{24} V = 149V$.

Nga ana tjetër do ta njehsojmë nëpërmjet kushteve për rentë. Renta pranohet 9 vjet, në tre muaj. Domethënë, gjithsej $n = 9 \cdot 4 = 36$ renta të cilat paguajnë në fillim të tremujorshit të parë, dometënë janë anticipative. Faktori i kamatës është $r_2 = 1{,}02$. Atëherë,

$$M = R \cdot r_2 \frac{r_2^{36} - 1}{r_2^{36}(r_2 - 1)} = 18000 \cdot 1{,}02 \frac{1{,}02^{36} - 1}{1{,}02^{36}(1{,}02 - 1)} = 18000 \cdot 26 = 468000 .$$

Duke i barazuar të dy vlerat e mizës, kemi $149V = 468000$, pra për depozitin kemi $V = 3141$ denarë. ◆

4. Para nëntë viteve personi ka paguar në bankë 38000 denarë. Dy vitet e para nuk ka pasur as pagesë as të ardhura. Pastaj, gjatë 3 viteve, është deponuar depozit prej 8000 denarë çdo 6 muja. Duke filluar prej sot, 5 vitet e ardhshme do të pranojmë rentë vjetore prej 15000 denarë. Sa mjete do të kemi në 4 vjet pas rentës së fundit, nëse deri më sot ka vlejtur norma e kamatës prej 8% *p. a (d)* me kamatizim gjysmëviti, kurse prej sot 10% *p. a(a)* me kamatizim vjetor. Edhe depoziti edhe renta janë anticipative (fig. 19).

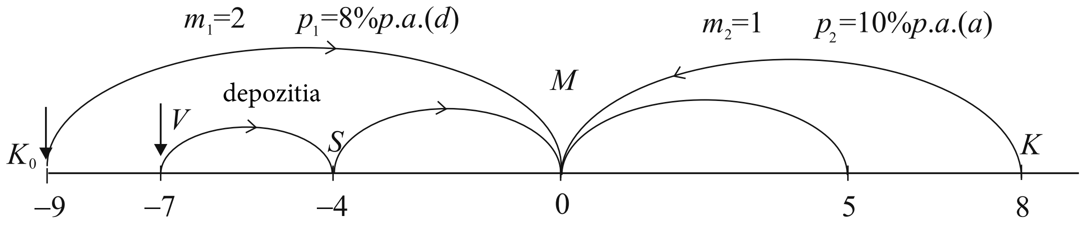


Fig. 19

Do t'i barazojmë vlerat e kamatizuara të pagesave sot me mizën e nevojshme dhe mbetjen e diskontuar K. Faktori i kmatës deri më sot është $r_1 = 1 + \dfrac{8}{2 \cdot 100} = 1{,}04$. Shuma e parë e deponuar K_0 = 38000 denarë kamatizohet deri më sot, gjysmëviti, domethënë gjithsej 9 · 2 = 18 herë. Shuma e përgjithshme e depozitit, që deponohet gjithsej 3 · 2 = 6 herë është $S = V \cdot r_1 \dfrac{r_1^6 - 1}{r_1 - 1} = 8000 \cdot 1{,}04 \dfrac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04 - 1} = 55186$ denarë, kurse kjo shumë kamatizohet deri më sot, pra sasia e përgjithshme e mjeteve dei më sot është

$K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^{4 \cdot 2} = 38000 \cdot 1{,}04^{18} + 55186 \cdot 1{,}04^8 = 152507$ denarë.

Për pagesat e ardhshme të nevojshme janë njehsime për mizën dhe vlerën e diskontuar të mebtjes.Të vërejmë se kërkohet mbetja 4 vite të rentës së fundit, por në 8 vitet prej tani e njehsojmë mbetjen. Atëherë vlera e diskontuar K është $K \cdot \dfrac{1}{\rho_2^8}$, ku faktori i kamatës anticipative është $\rho_2 = \dfrac{100}{100 - 10} = 1{,}11$.

Për mizën vlen: $M = R \cdot \rho_2 \cdot \dfrac{\rho_2^5 - 1}{\rho_2^5 (\rho_2 - 1)}$, për pesë vjet renta anticipative denarë. Atëherë

$M = 15000 \cdot 1{,}11 \cdot \dfrac{1{,}11^5 - 1}{1{,}11^5 (1{,}11 - 1)} = 61537$ denarë.

Duke i barazuar vlerat themelore te vlera e pagesës duke marrë parasysh vlerat e tanishme të të gjitha pagesave dhe të ardhurave të tanishme $K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^8 = M + K \cdot \dfrac{1}{\rho_2^8}$, fitojmë se

$152507 = 61537 + K \cdot 1{,}11^{-8}$ dhe prej këtu K = 39474 denarë. Në llogari,në fund të vitit të tetë prej tani , na ngelin 39474 denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1*. Para 11 vjetëve kemi filluar me deponim të depozitit të gjysmëvitit prej 8000 denarë gjatë 4 viteve. Para 3 vjet kemi deponuar 90000 denarë nga njëherë. Prej sot pranojmë rentë mujore gjatë 7 vjetëve, ashtu që 49 muaj pas rentës së fundit na ngelin edhe 50000 denarë. Sa është renta, nëse norma e kamatës është 8% *p.a (d)* me kapoitalizimin gjysmëviti deri më sot, por 12% *p. a (d)* me kapitalizimin mujor prej sot e tutje? Edhe rentet edhe deponimet janë anticipative.

2*. Para 12 vjet kemi deponuar ndonjë sasi në bankë. Tre vjet pastaj kemi filluar të deponojmë depozit gjysmëviti prej 3000 denarë në afat prej 5 vitesh. Prerj sot pranojmë rentë gjysmëviti prej 5000 denarë, në kohëzgjatje prej 8 vjet. Një vit dhe 6 muaj pas rentës së fundit në bankë kemi edhe 4000 denarë. Sa sasi kemi paguar para 12 vjet, nëse norma e kamatës deri më sot është 8% *p.a (a)*, por prej sot p = 6% *p. a (d)*, me kamatizim gjysmëviti. Edhe depozitat edhe rentat janë anticipative.

3*. Para tre vjet, me kohëzgjatje prej 2 vjet, deponojmë anticipi mujor prej 2000 denarë. Para një viti kemi deponuar edhe 40000 denarë. Një vit prej tani, në kohëzgjatje prej 5 vjet, pranojmë rentë anticipative mujore në sasi R , por gjashtë vjet prej sot, në kohëzgjatje prej një viti, dop të pranojmë rentë anticipative prej 2200 denarë. Nëse norma e kamatës është 13% *p. a (d)*, sa është renta pesëvjeçare? Kamatizimi është mujore.

4*. Një person, para 30 vjet pra deri para 10 vjetëve, ka deponuar në fillim të çdo muaji nga 1100 denarë, me normë të kamatës 24% *p.a.(d)* dhe kamatizim mujor. Prej atëherë pra e këtej norma e kamatës është 4% *p.a.(d)* me kamatizim gjysmëviti. Sa rentë gjysmëviti anticipativ mund të pranon personi, duke filluar prej sot, pra në 15 vitet e ardhshme dhe në ditën e pagesës së fundit t'i ngelin edhe 50000 denarë.

5*. Një person ka deponuar, prej moshës së tij shtatëvjeçare deri në moshën pesëmbëdhjetëvjeçare, në fillim të çdo tremujori nga 7000 denarë. Në moshën njëzetëvjeçare ka deponuar edhe 200000 denarë. Sa mjete do t'i ngelin personit pesëdhjetëvjeçare, nëse në periudhën ndërmjet moshës tredhjetë dhe dyzetëvjeçare ka pranuar rentë prej 125000 denarë, në fillim të çdo tremujori. Norma e kamatës është 8%*p.a.(d)* me kamatizim tremujor.

8. 11. Detyra për ushtrime

1. Prej sot, gjatë një viti dhe tetë muaj, do të deponojmë nga 1200 denarë në fillim të çdo muaji. Me cilën shumë do të disponojmë tre vjet prej sot, nëse norma e kamatës është 6% *p. a (d)*, por kamatizimi është mujor?

2. Para dy vjet në bankë kemi deponuar 40000 denarë. Sa depozit duhet të paguajmë në tre vitet e ardhshme në fund të çdo muaji, nëse kemi nevojë pas 4 vjetë prej tani, prej 800000 denarë? Norma e kamatës është 18% *p. a (d)*, por kamatizimi mujor.

3. Sa depozit tremujor prej 4500 denarë duhet të paguajmë, për tre muaj pas depozitit të fundit të disponojmë me 120000 denarë? Norma e kamatës është 10%, por kamatizimi është tremujor.

4. Personi ka deponuar nga 6000 denarë në fund të çdo semestri, të moshës së tij 35 vjeçare deri në moshën e tij 41 vjeçare, që në ditën e depozitit të fundit ka 144000 denarë. Me cilën normë të kamatës është krye deponimi, nëse deponimi është semestral?

5. Sa vjet, përfundimisht me ditën e sotshme, personi ka deponuar depozitë anticipativ tremujor prej 6000 denarë, që katër vjet prej sot të disponon me 314422 denarë? Norma e kamatës është 6% *p. a (d)*, kamatizimi është mujor.

6. Cila shumë duhet prej sot të deponohet nëse dëshirojmë 20 vjet të pranojmë rentë kuartale dekurzive prej 7200 denarë? Norma e kamatës është 8% *p. a (d)*, kamatizimi është tremujor.

7. Prej sot dje në dy vitet e ardhshme, deponojmë në fund të çdo muaji nga 2500 denarë. Sa rentë do të pranojmë në fillim të çdo muaji, gjatë dy viteve, duke filluar 4 vjet prej tani? Norma e kamatës është 12% *p.a(d)*, kamatizimi është mujor.

8. Sa herë mund të pranojmë rentë semestrale anticipative prej 10000 denarë, prej sot e tutje, nëse sot kemi deponuar 100000 denarë? Norma e kamatës është 5% *p. a (d)*, por kamatizimi është semestral. Sa është kamata e mbetjes së rentës?

9. Sot kemi deponuar 115610 denarë, por pas një muaji fillojmë të pranojmë rentë prej 9000 denarë, në fund të çdo muaji gjatë dy viteve të ardhshme. Sa është norma e kamatës, nëse kamatizimi është mujore?

10. Cila shumë duhet ta deponojmë sot, që pas pesë vjet të dispopnojmë me 59008 denarë, të cilat do t'i shfrytëzojmë si miza për rentën tremujore dekurzive prej 12000 denarë, në kohëzgjatje prej 3 vjet, gjatë kamatizimit tremujor?

11*. Para 10 vjet në bankë kemi paguar 50000 denarë. Katër vjet më vonë, fillojmë me deponime periodike prej 800 denarë në fillim të çdo muaji, në kohëzgjatje prej 6 vitesh. Sot e pranojmë rentën e parë mujore prej 3000 denarë dhe e pranojmë 2 vjet, në fillim të çdo muaji. Gjysmëviti pas rentës së fundit, nxjerrim edhe 197650 denarë. Sa mjete na ngelin 3 vjet prej sot, nëse norma e kamatës është 10% *p. a(d)* me kamatizim mujor?

12*. Prindi ka deponuar në librezën e kursimit fëmijës së tij në fund të çdo muaji nga 500 denarë, por prej moshës së tij 8 vjeçe deri te mosha 15 vjeçare, kurse prej moshës 18 vjeçare deri në moshën 24 vjeçare nga 600 denarë në fillim të çdo muaji. Pastaj prej moshës 26 vjeçare pra gjatë 1,5 vjet prindi ka deponuar nga 250 denarë, në mënyrë anticipative mujore. Sa mjete do të ketë fëmija, gjashtë muaj pas depozitit të fundit, nëse norma e kamatës është 10% *p. a (d)*, me kamatizim mujor?

13. Para 12 vjet është deponuar ndonjë shumë, por sot janë nxjerrë 30000 denarë. Prej sot dhe deri gjatë 6 viteve të ardhshme janë deponuar katërmujorshe dekurzive nga 500 denarë. Norma e kamatës është 6% *p.a(d)*, me kamatizim katërmujor. Cila shumë është deponuar para 12 viteve, nëse 12 vjet prej tani në llogari ka 208790 denarë?

14. Para disa viteve pra deri më sot, personi ka depnuar në fillim të çdo tremujori nga 12000 denarë, por katër vjet prej sot disponon mem 175400 denarë. Norma e kamatës është 12% *p. a(d),* por kamatizimi është tremujor. Para sa vitesh ka filluar kamatizimi?

15. Personi ka depinuar 80000 denarë. Sa rentë mund të pranon në fillim të çdo tremujori, duke filluar 2,5 vjet prej tani me kohëzgjatje 2,5 vjet? Norma e kamatës është 12% *p. a (d),* me kamatizim tremujor.

16*. Cila shumë duhet të deponohet një vit e tre muaj prej sot, nëse dëshirojmë të deponojmë pra deri në 3 vjet prej sot të pranojmë, mujore dekurzive, rentë prej 4500 denarë, por në ditën e rentës së fundit të ngelin edhe 11250 denarë? Norma e kamatës është 12% *p. a(d),* por kamatizimi është mujore.

17*. Para 5 vjet, personi ka deponuar 24000 denarë, por prej sot në dy vitete e ardhshme deponon nga 38330 denarë, gjashtëmujore anticipative. Me cilën shumë do të dispëonon personi 5 vjet prej tani, nëse norma e kamatës është e barabartë për tërë kohën, me kamatizim gjysmëviti, por në ditën e depozitit të fundit personi disponon me 400000 denarë?

18*. Sot janë deponuar 150000 denarë, por pas dy vjetëve do të nxjerrim 60000 denarë. Prej vitit të pestë pra deri në vitin e dhjetë prej sot, do të pranojmë rentë vjetore dekurzive, por tre vjet pas rentës së fundit, në llogari do të ngelin edhe 30000 denarë. Sa është renta, nëse norma e kamatës është 5% *p. a(d),* por kamatizimi është vjetore.

Pasqyra tematike

Gjatë zbatimit të llogarisë së kamatës së thjeshtë dhe të përbërë shqyrtojmë shuma të cilat njëherë deponohen, si edhe shembuj te të cilat shuma deponohet ose nxirret në periudha të ndryshme. Poashtu deponimet e veçanta mund të jenë të barabarta, por edhe të ndryshme, të ndryshohen sipas ligjit të caktuar, për shembull, të rriten ose të zvogëlohen sipas ligjit të progresikonit aritmetik ose gjeometrik ose sikurse te kursimi, të ndryshojnë pa e konstatuar ligjin prej më parë. Por, shpeshherë ndodh deponimet të përsëriten në intervale kohore të barabarta. Kur shumë herë deponohet sasia e njëjtë, në periudha të njëjta kohore dhe kamatizohet me të njëjtën normë të kamatës, flasim për **depozitë,** të cilët për shkak të sasisë së njëjtë deponohet ende dhe depozita të njëjta.

Varësisht prej asaj se deponimi (pagesa e depozitit) është në fillim ose në fund të intervalit kohor, dallojmë **depozitë anticipativ,** përkatësisht **dekurziv.** Gjatë deponimit, çvo depozit i veçantë kamatizohet prej momentit të deponimit deri te momenti i njehsimi të vlerës së fundit të depozitave. Mund të shfrytëzohen edhe kamatizimet dekurzive dhe anticipative. Poashtu mendet deponimet e veçanta të puthiten me kamatizimin, por mundet të jenë më të rralla ose më të shpeshta prej kamatizimit. Parashtrohet pyetja sa është vlera e përgjithshme prej të gjitha depozitave të veçanta. **Vlera e fundit** e deponimit quhet shuma e depozitave të veçanta të kamatizuara në fund të periudhës.

Do të shqyrtojmë vetëm deponimet të veçanta periodike te të cilat deponimet puthiten me kamatizim, ku deponimet te të cilat puthiten me kamatizimin, gjatë deponimeve me depozitë të rregullt (të pandryshueshëm).

Nëse gjatë vitit paguhet një depozitë, flasim për **depozitë vjetor,** nëse deponmimi është dy herë në vit, deponimet janë **gjashtëmujore (semestrale),** për deponimet 4 herë në vit, përkatësisht në çdo tre muaj, depozitat janë **tremujore (kuartale).** Nëse deponimi është njëherë në muaj, atëherë themi se depozitat janë **mujore.** Edhe këtu kamatizimi mund të jetë vjetore, gjashtëmujore, tremujore etj.

Shuma e depoziti të kamatizuar anticipativ njehsohet me

$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n-1}{r-1}}$ me kamatizim dekurziv.

$\boxed{S_n = V\rho\frac{\rho^n-1}{\rho-1}}$ me kamatizim anticipativ.

Shuma e depozitave të kamatizuara dekurzive njehsohet me

$\boxed{S_n = V\frac{r^n-1}{r-1}}$ me kamatizim dekurziv.

$$\boxed{S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$$ me kamatizim anticipativ.

Vlera e depozitit të kamatizuar anticipativ njehsohet me

$$\boxed{V = S_n\frac{r-1}{r\left(r^n - 1\right)}}$$ me kamatizim dekurziv,

$$\boxed{V = S_n\frac{\rho-1}{\rho\left(\rho^n - 1\right)}}$$ me kamatizim anticipativ.

Vlera e depozitit të kamatizuar dekurziv njehsohet me

$$\boxed{V = S_n\frac{\rho-1}{\rho^n - 1}}$$ me kamatizim anticipativ,

$$\boxed{V = S_n\frac{r-1}{r^n - 1}}$$ me kamatizim dekurziv.

Numri i deponimeve për depozitat anticipatiive njehsohet me formulën

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Vr + S_n\left(r-1\right)}{Vr}}.$$

Numri i deponimeve për depozitat dekurzive njehsohet me formulën

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{V + S_n\left(r-1\right)}{V}}.$$

Depoziti i fundit është i ndryshueshëm prej të tjerëve dhe quhet **mbeztja e depozitit.** Te kamatizimi anticipativ depoziti i fundit njehsohet me formulën.

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{\rho}S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$$ me kamatizim anticipativ,

$$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$$ me kamatizim dekurziv.

Te kamatizimi dekurziv depoziti i fundit njehsohet me formulat

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{r}S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}$$ me kamatizim anticipativ,

$$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}$$ me kamatizim dekurziv.

Prej formulës për vlerën e fundit të depozitit anticipativ me kamatizim dekurziv, $S_n = Vr\frac{r^n-1}{r-1}$, nëse vlera e njohur për S_n dhe V, por nuk është i njohur faktori i kamatës r, përkatësisht norma e kamatës p% *p. a (d)*, fitohet barazimi

$$\boxed{r^{n+1} - \left(\frac{S_n}{V}+1\right)r + \frac{S_n}{V} = 0}.$$

Ky është barazim polinomial me faktori *r,* që në rastin e përgjithshëm është prej shkallës më të lartë prej 3, kurse për barazimet e këtilla nuk ekziston metodë e njohur për zgjidhje, përveç në disa raste speciale të metodave numerike. Por, këtu qëllimi nuk është t'i mësojmë metodat numerike, por në dobi të detyrave praktike, më së lehti ta caktojmë normën e kamatës. Për këtë qëllim, njehsimi i normës së kamatës do ta bëjmë sipas formulës e cila shfrytëzon vlerat e tabelave *i / i*. Kështu $S_n = V \cdot \mathrm{III}_p^n$.

Diskutimin e njëjtë e realizojmë edhe për depozitat dekurzive. Prej vlerës së fundit të depozitave $S_n = V\frac{r^n-1}{r-1}$, me transformimin e shprehjes për faktorin e kamatës kemi

$$\boxed{r^n - \frac{S_n}{V}r + \frac{S_n}{V} - 1 = 0},$$

që është përsëri barazim polinomial sipas r . Duke e shfrytëzuar formulën për vlerën e fundit të depozitave nëpërmjet vlerave prej tabelës *i/i*, $S_n = V\left(1+\mathrm{III}_p^{n-1}\right)$, kemi $\mathrm{III}_p^{n-1} = \frac{S_n}{V} - 1 = \frac{S_n - V}{V}$.
Nëse vlera $\frac{S_n - V}{V}$ gjendet te tabelat për vlerën e njohur *ū* -1, norma e kamatës lexohet direkt, në të kundërtën e fitojmë me interpolim linear.

Pranimet në intervale të barabarta kohore quhet **rentë.** Rentet mund të jenë të **përhershme** dhe të **ndryshueshme** varësisht prej asaj se a janë të barabarta ose jo intervalet kohore ndërrmjet dy pranimeve. Në lidhje me kohën e pagesës, renta mund të pranohen në fillim të periudhës- **renta anticipativ** ose në fund të periudhës – **renta dekurzive.** Në lidhje me kohëzgjatjen të pagesës, renta mund të jetë **kohore, deri sa është jeta** ose e **përjetshme.** Në lidhje me periudhën për të cilën paguhet renta, dallojmë rentë **vjetore, gjysmëvjetore, tremujore, mujore** dhe të ngjashme.

Për pranimin e rentës, duhet paraprakisht të jenë siguruar mjete. Shuma e këtillë, e deponar me qëllim të sigurohet pranimi i rentës quhet **miza.** Bëhet fjalë për një pagesë të mjeteve. Por, është e mundshme mjetet të sigurohen dhe me pagesa periodike. Nëse pagesa e rentës fillon menjëherë pas deponimit të mizës, renta quhet **e drejtpërdrejtë,** por nëse fillon pas periudhës kohore të caktuar pas pagesës së mizës, renta quhet **renta e anulimit.**

Na hulumtuam pagesa periodike, me sasi konstante, te të cilat kamatizimi puthitet me pranimin e rentës. Norma e kamatës është dekurzive gjatë nxjerrjes së formulave, por ka raste me kamatizim anticipativ. I shfrytëzuat këto simbole: M_n -miza, R -renta, n –numri i pagesave, r –faktori i kamatës dekurzive, p –faktori i kamatës anticipative.

Miza te rentat anticipative njehsohet sipas formulave

$$\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}} \text{ me kamatizim dekurziv,}$$

$$\boxed{M_n = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}} \text{ me kamatizim anticipativ.}$$

Miza te rentat dekurzive janë paraqitur me formulat

$$\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}} \text{ me kamatizim dekurziv,}$$

$$\boxed{M_n = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho-1)}} \text{ me kamatizim anticipativ.}$$

Nëse dihet vlera e mizës M_n, kushtet e kamatizimit dhe pranimet e rentës, atëherë vlera e rentës paraqitet sipas formlave

$$\boxed{R = M_n\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}} \text{ për rentën anticipative me kamatizim dekurziv,}$$

$$\boxed{R = M_n\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}} \text{ për rentën dekurzive me kamatizim dekurziv,}$$

$$\boxed{R = M_n\frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n - 1}} \text{ për rentën anticipative me kamatizim anticipativ,}$$

$$\boxed{R = M_n\frac{\rho^n(\rho-1)}{\rho^n - 1}} \text{ për rentën dekurzive me kamatizim anticipativ.}$$

Nëse dihet vlera e mizës, renta dhe norma e kamatës, atëherë numri i rentave anticipative janë paraqitur sipas formulave

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}}$$ te norma e kamatës dekurzive dhe

$$\boxed{n=\frac{1}{\log \rho}\cdot\log\frac{R\rho}{R\rho-M_n(\rho-1)}}$$ te norma e kamatës anticipative.

Nëse dihet vlera e mizës, renta dhe norma e kamatës, atëherë numri i rentave dekurzive janë paraqitur sipas formulave

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{R}{R-M_n(r-1)}}$$ te norma e kamatës dekuzive dhe

$$\boxed{n=\frac{1}{\log \rho}\cdot\log\frac{R}{R-M_n(\rho-1)}}$$ te norma e kamatës anticipative.

Renta e fundit, përkatësisht mbetja e rentës te renta dekurzive njehsohet me formulën

$$\boxed{R_0=\left[M_n-R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]\cdot r^n}\ .$$

Norma e kamatës kur dihen madhësitë tjera prej formulës për mizën, $M_n=R\left(1+\mathrm{I}V_p^{n-1}\right)$ për rentën anticipative dhe $M_n=R\cdot\mathrm{I}V_p^n$ për rentën dekurzive, njehsohet si madhësi e panjohur.

9 KREDIA

9. 1. Koncepti dhe llojet e kredive

Gjatë mungesës së mjeteve finansiare, që të mbulohen obligimet momentale, njerëzit shfrytëzojnë mjete të huazuara (kredi). Ndonjëherë, dhe me afat të gjatë, të ardhurat, qoftë fizike, qoftë persona juridik, nuk janë mirë për realizimin e nevojave finansiare dhe incidente të planifikuara. Nësituatën e këtillë, shfrytëzohen **kredi,** përkatësisht mjete të cilat huazohen gjatë kushteve të caktuara. Dhënësi dhe kërkuesi i kredisë, bëjnë[marrëveshje rreth sasisë së kredisë, mënyra e pagesës, koha e pagesës, norma e kamatës e cila do të shfrytëzohet dhe të gjitha situatat tjera të cilat mund të ndodhin, të lidhura për pagesë.

Kredia paraqet shërbim i përkohësishëm nga ana e kreditorit ndaj borxhliut, përkatësisht kontratë për dhënien e mjeteve finansiare shfrytëzuesit, i cili të njëjtat mund t'i shfrytëzon edhe në afat të caktuar dhe në afat të caktuar t'i kthen.

Në këtë pjesë do të bëhet fjalë për mënyrën e konstatimit të obligimeve të kërkuesit të kredisë, duke përfshirë kamatizimin për kohën për të cilën shfrytëzohet kredia dhe plotësimi i tyre sipas kushteve të dhëna në kontratët për kredi. Poashtu, kredia lejohet njëherësh në sasi të caktuar, por më së shpeshti nuk kthehet menjëherë, por në periudha të caktuara, me shuma të caktuara. Shuma me të cilën paguhet kredia në çdo periudhë, quhet **shlyerje,** por shlyerja, së bashku me kamatën për periudhë të caktuar, quhet **anuitet.** Periudha kohore, për tëcilën kryhet çdo shlyerje e veçantë e kredisë është **periudha e amortizimit.**

Sipas nevojave, në pajtim me ligjet ekzistuese, gjatë kohës, ekzistojnë më shumë ndarje të kredive:

• sipas kohëzgjatjes së shlyerjes, kreditë ndahen në **afat të shkurtër** (me afat të kthimit prej më së shumti një vit), **me afat të mesëm** dhe **afat të gjatë.**

• sipas mënyrë së shlyerjes, kreditë ndahen në **amortizues** dhe **rente.** Kreditë amortizuese nënkuptojnë kthimin e kredisë në periudhën kohore të caktuar, me shlyerje të kamatës dhe pjesë të borxhit. Rentet e kredisë nënkuptojnë pagesë e përhershme në formë të rentës.

• sipas sigurimit me garancë, ekzistojnë, kredi **personale** dhe **reale.** Kreditë personale jepen pa garancë, në bazë të besimit që e ka kërkuesi te kreditori. Kreditë reale jepen në bazë zë mbulesës përkatëse, sikurse janë për shembull hipotekat.

• sipas dhënësit të kredisë, dallojmë, kredi **të vendit** ose **të jashtëm, publik** ose **privat, bankier** ose **jobankier** dhe të ngjashëm.

• sipas asaj se për kredinë a paguhet ose nuk paguhet kamata, dallojmë kredi **me kamatë** dhe **pa kamatë**.

• sipas mënyrë së dhënies së dokumenteve për obligim, kreditë mund të jenë **obligativ** (një dokument për tërë sasinë) dhe **kredi të ndara në obligues** (me shumë dokumente për më shumë kreditor, me vlera të barabarta ose të ndryshme sipas kreditorit, por me sasi të përgjithshme sa është tërë krediti).

• sipas kohës të pagesës së anuiteteve, dallojmë kredi **me anuitete dekurzivr** (pagesa bëhet në mënyrë dekurzive, në fund të periudhave të caktuara të pagesësë) **dhe me anuitete anticipative** (pagesa kryhet në mënyrë anticipative, në fillim të periudhës sl pagesës).

• sipas mënyrës së njehsimit të kamatës, dallojmë kredi **me kamatizim dekurziv** dhe **me kamatizim anticipativ.**

Ngjashëm sikurse edhe rentet, kreditë mund të jenë me anuitet dekurziv dhe anticipativ, me anuitet dekurziv dhe kamatizim dekurziv dhe në të njëjtën mënyrë për kreditë me anuitetet anticipative, me kamatizim dekurziv ose anticipativ.

Amortizimi im kredive mund të kryhet në mënyra të ndryshme, mundet në periudha të caktuara të paguhet vetëm kamata për mjetet për kohën e kaluar, por gjatë pagesës së borxhit të paguhet tërë boprtxhi, ose pra, në çdo periudhë të amortizimit të paguhet shuma e cila është shumë prej kamatës së njehsuar dhe pjesë e kredisë.

Gjithashtu, të vërejmë se **amortizimi i kredisë** sikurse quhet pagesa graduale e kredisë sipas sasisë prej më parë të caktuar, në intervale kohore të caktuara, realizohet sipas pla nit prej më parë të konstatuar i cili quhet **plani amortizues.** Por, që të përpunohet plani amortizues, te i cili saktë shihet, në cilin moment sa duhet të paguhet, sa ngel prej borxhit dhe sa kamatë është njehsuar, është e nevojshme të shohim sikurse çdonjëra prej madhësive të veçanta njehsohen.

Poashtu, edhe pagesat edhe anujitetet mund të jenë të përhershme ose të ndryshohen sipas rregullës së caktuar, për shembull, progresion i aritmetik ose gjeometrik. Neve na interesojnë kreditë me anuitetet të përhershme, pasi ato më së shpeshti dhe më thjeshtë edhe për kërkuesin, pasi e shpërndan borxhin në mënyrë të njëtrajtshme në gjithë periudhën. Nëse kredia është[me pagesa të barabarta, për kërkuesin është e pavolitshme pasi në kohën kur merret kredia, kërkuesi është i ngarkuar me anuitete të mëdhaja. Gjithashtu, mundet njehsimi i kamatës të puthitet ose të mos puthitet me periudhën e pagesës së anitetit.

Këtu do të shqyrtojmë kredi me anuitetet të barabarta dhe kredi me rrumbullakimin e anuiteteve, në të dy rastet do t'i shqyrtojmë vetëm kreditë me anuitet dekurziv dhe njehsim dekurziv të kamatës, te të cilat periudha e kamatizimit puthitet me periudhën e amortizimit. Llojet tjera realizohen në mënyrë të ngjashme.

Për në fund, lirisht mund të themi se kredia është e barabartë me shumën e vlerave të diskontinuara të të gjitha anuiteteve të veçanta, në ditën e nxjerrjes së kredisë, që përkujton në njehsimin e mizës te rentet. Duke shfrytëzuar përfundimin e fundit, tani më e dim që kredia në cilën mënyrë do t'i kryejmë njehsimet për madhësitë në planin amortiozues.

Detyra për punë të pavarur

1. Çka është shlyerja, çka është anuiteti, por çka është periudha e amortizimit?

2. Përmend katër kriteriume sipas të cilave kryhet ndarja e kredive.

3. Si ndahen sipas kohëzgjatjes, por si sipas mënyrës së shlyerjes?

4. Çka është plani amortizues?

5. Cili është dallimi ndërmjet kredive personale dhe reale?

6. Cili është dallimi ndërmjet kredive amortizuese dhe renteve?

9. 2. Njehsimi i kredisë dhe anuitetit te kreditë me anuitete të barabarta

Është nxjerrë kredi Z , i cili duhet të paguhet me n anuitete të barabarta, çdonjëri prej tyre me sasi a, norma e kamatës p dhe kamatizimi dekurziv, ku periudha e kamatizimit puthitet me periudhën e pagesës së anuiteteve. Faktori i kamatës dekurzive është r, i njehsuar për çdo periudhë të veçantë të kamatizimit, përkatësisht duke përfshirë normën e kamatës relative. Në momentin e nxjerrjes së kredisë, kreia është e barabartë me shumën e vlerave të diskontuara të të gjitha anuiteteve të veçanta, të cilat paguhen në fund të çdo periudhe. Te boshti numerik, krejtësisht e barabartë sikurse te rentet, kur njehsohet vlera e mizës, shënohen periudhat e pagesës së anuiteteve (fig. 1).

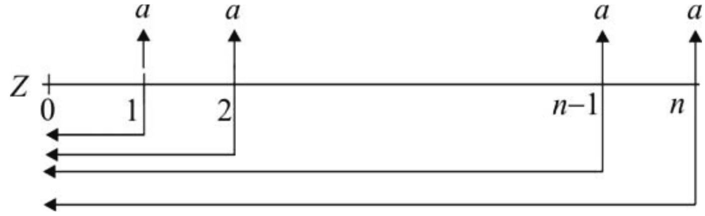


Fig. 1

Në pajtim me rregullat për diskontuim, ta njehsojmë vlerën e kredisë nëse dihet vlera e anuiteteve. Anuiteti i parë paguhet në fund të periudhës së parë, pra diskontohet për një periudhë, i dyti për dy periudha, deri në fund, kur anuiteti i fundit diskontohet për n periudha dhe atë:

$$Z=\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\frac{a}{r^3}+\ldots+\frac{a}{r^n}=\frac{a}{r}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-1}}\right).$$

Shprehja në kllapa paraqet shumën e n anëtarëve të njëpasnjëshëm të progresionit gjeometrik, me anëtarin e parë 1 he herësin $\frac{1}{r}$. Prej këtu,

$$Z=\frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{a}{r}\frac{\frac{r^n-1}{r^n}}{\frac{r-1}{r}},\ \text{përkatësisht}\ \boxed{Z=a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}}.$$

Vërejtja 1. Sikurse vërejtët te pjesa për rentet, shprehja $\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ mund të zëvëndësohet me vlerën e tabelëssë katërtë *i / i*, $\mathrm{I}V_p^n$, pra formula për njehsim të kredisë, kur dihet anuiteti bëhet $\boxed{Z=a\cdot \mathrm{I}V_p^n}$, një lloj si edhe formula për njehsimin e mizës te rentat.

Prej formulës së njëjtë, duke e zgjidhur sikurse barazimi sipas anuiteteve, kur dihet kredia, për paraqitjen e anuiteteve kemi:

$$\boxed{a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}}.$$

Vërejtja 2. Duke shfrytëzuar vlerat prej tabelave *i / i*, për anuitetin kemi $a=\frac{Z}{\mathrm{I}V_p^n}$. Përkufizohet tabela e pestë *i / i* si vlerë reciproke e të katërtës, $V_p^n=\frac{1}{\mathrm{I}V_p^n}$, përkatësisht $V_p^n=\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$. Atëherë për anuitetin vlen $\boxed{a=Z\cdot V_p^n}$.

1. Sa kredi mund të amortizohet me anuitetet të barabarta prej 5000 denarë mujore, për pesë vjet, me normë të kamatës dekurziv 24% *p.a.(d)*, me kamatizim mujor?
Prej të dhjënave të dhëna te detyra, e dini se $n = 5$, por ka $m = 12$ kamatizim vjetor dhe gjithashtu po aq kredi gjatë një viti. Atëherë numri i pagesave është $nm = 60$, faktori i kamatës dekurzive është $r=1+\frac{24}{12\cdot 100}=1{,}02$. Prandaj formula për n jehsimin e kredisë,

$$Z=a\frac{r^{60}-1}{r^{60}(r-1)}=5000\cdot\frac{1{,}02^{60}-1}{1{,}02^{60}(1{,}02)-1}=173804{,}43\ \text{denarë.}\ \blacklozenge$$

Prej tani e tutje, me m, përveç që e shënoni numrin e kamatizimit vjetor, do ta shënoni edhe numrin e anuitgeteve, përkatësisht periodat e amortozimit, duke pasur parasysh kushtet fillestare te të cilët përmendëm se të njëjtë puthiten, por me $\bar{u}$ kohëzgjatja e amortizimit.

2. Kredi prej 40000 denarë, amortizohet për 10 vjet, me anuitete gjysmëviti dhe normë të kamatës 4% $p.a(d)$. Sa është anuitetet i gjysmëvitit, nëse edhe kamatizimi është gjysmëviti?Sa është kamata e njehsuar?

Është dhënë $\bar{u}=10$, $m=2$, anuitetet janë gjysmëviti, pra numri i përgjithshëm i anuiteteve 4 është $nm=20$. Faktori i kamatës është $r=1+\frac{4}{200}=1{,}02$. Për kredinë e njohur është $Z=40000$ denarë, në të gjitha periudhat e amortizimi,t është:

$$a=Z\frac{r^{20}(r-1)}{r^{20}}=40000\frac{1{,}02^{20}(1{,}02-1)}{1{,}02^{20}}=2447{,}27 \text{ denarë.}$$

Kamata e njehsuar është ndryshimi i anuiteteve të përgjithshme të pagesave dhe sasia e kredisë, përkatësisht kamata e njehsuar është $I=nm\cdot a-Z=20\cdot 2447{,}27-40000=8945{,}4$ denarë. ◆

Të vërjemë se formula për kamatën e njehsuar, për tërë kohëzgjatjen e amortizimit është paraqitur me ndryshimin e vlerës së përgjithshme të anuiteteve dhe kredisë së kontraktuar, në formë të $I=nm\cdot a-Z$.

3. Kredia prej 2000000 denarë amortizohet me anuitete të barabarta, gjatë 10 vjetëve, me normë të kamatës 6% $p.a(d)$. Njehso anuitettin nëse pagesat janë:

a) gjysmëviti; b) tremujore.

Kamatizimi puthitet me periudhën e amortizimit.

Në të dy rastet $Z=2000000$, $n=10$.

a) Do ta zgjidhim detyrën vetëm duke shfrytëzuar tabelat i / i. Kështu,

$a=Z\cdot V_3^{20}=2000000\cdot 0{,}06721571=134431{,}42$.

Kryej provën me njehsimin e drejtpërdrejt dhe duke shfrytëzuar tabelën e katërt i / i.

b) Për $m=4$, $r=1+\frac{6}{400}=1{,}015$, kurse numri i anuiteteve është 40. Atëherë,

$$a=Z\frac{r^{40}(r-1)}{r^{40}}=2000000\frac{1{,}015^{40}(1{,}015-1)}{1{,}015^{40}}=66854 \text{ denarë.} ◆$$

Detyra për punë të pavarur

1. Sa kredi mund të amortizohet me anuitete të barabarta gjatë 8 viteve, me normë të kamatës 5% $p.a.(d)$, nëse anuiteti është 15000 denarë. Periudha e kamatizimit puthitet me periudhën e amortizimit. Anuiteti paguhet:

a) vjetore; b) gjysmëvjetore; c) tremujore.

Njehsimet kryej drejtpërdrejt sipas formulës dhe me zbatimin e tabelave i /i.

2. Sa kredi mund të amortizohet për 4 vjet, me normë të kamatës 6% *p.a.(d)*, me anuitetet vjetore të barabarta prej 10000 denarë? Kamatizimi është vjetor, anuitetet dekurzive.

3. Me çfarë anuitetet semestrale të barabarta do të amortizohet kredia prej 400000 denarë, për kohën prej 15 vjet, me normë të kamatës 3% *p.a.(d)*? Kamatizimi është semestrale dekurzive.

4. Cilia kredi amortizohet me anuitet vjetor prej 20000 denarë, për 5 vjet, me 4% *p.a.(d)* normë të kamatës, nëse kamatizimi është vjetore?

5. Kredia prej 50000 denarë amortizohet për 5 vjet, me anuitetet tremujore, me normë të kamatës 8% *p.a.(d)*. Sa është anuiteti? Kamatizimi është tremujor.

9. 3. Njehsimi i shlyerjes te kredia me anuitetet e barabarta

Tani më treguam se çdo anuitet përbëhet prej dy pjesëve, pjesa e parë është shlyerja, që paraqet një lloj e këstes për kthimin e kredisë së kontraktuar, kurse pjesa e dytë është kamata, e cila është për borxhin e ngelur (mbetja e borxhit) për periudhën e kaluar. Është marrë kredi Z, i cili duhet të shlyhet për n anuitete të barabarta, çdonjëri prej tyre me sasi a, norma e kamatës p dhe kamatizimi dekurziv, ku periudha e kamatizimit puthitet me periudhën e shlyerjes së anuiteteve. Nëse çdo shlyerje k e shënojmë me b_k, kurse k kamata me i_k, atëherë anuiteti i tij është:

$a = b_1 + i_1$,

ku kamata e parë njehsohet si kamatë për periudhën e parë, të gjigthë kredisë Z, përkatësisht $i_1 = \dfrac{Zp}{100}$.

Kuptohet, për fillim, do të llogarisim se norma p është për një periudhë të kamatizimit ta përdorim normën e kamatës relative.

Anuiteti i dytë është i barabartë me të parin, por me shlyerje të ndryshme dhe kamatë, $a = b_2 + i_2$. Tani kamata është për pjesën e ngelur prej borxhit, kurse ajo është $Z - b_1$ prej ku edhe

$$i_2 = \frac{(Z - b_1)p}{100}.$$

Anuiteti i tretë është $a = b_3 + i_3$, ku $i_3 = \dfrac{(Z - b_1 - b_2)p}{100}$, nga shkaqet që tani më janë shlyer prej borxhit, pjesa tjetër është $Z - b_1 - b_2$.

Duke e shgqyrtuar në të njëjtën mënyrë çdonjërin nga anuitetet e veçanta, arrijmë deri edhe te i fundit $a = b_n + i_n$, ku kamata njehsohet për pjesën tjetër prej borxhit $Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1}$, përkatësisht $i_n = \dfrac{(Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1})p}{100}$.

Që ta caktojmë lidhjen ndërmjet shlyerjeve, do t'i barazojmë anuitetet e njëpasnjëshme të cilët ndërmjet veti janë të barabarta. Kështu, nëse i barazojmë dy enuitetet e para, kemi $b_1 + i_1 = b_2 + i_2$, përkatësisht $b_1 + \frac{Zp}{100} = b_2 + \frac{(Z - b_1)p}{100}$.

Prej këtu $b_1 + \frac{b_1 p}{100} = b_2$ ose ndryshe e shkruar:

$$b_2 = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 r .$$

Në të njëjtën mënyrë, nëse i barazojmë cilëtdo dy anuitetet të njëpasnjëshme, k dhe k +1, kemi:

$$b_k + \frac{(Z - b_1 - ... - b_{k-1})p}{100} = b_{k+1} + \frac{(Z - b_1 - ... - b_{k-1} - b_k)p}{100},$$

prej ku, duke e rregulluar barazimin , kemi:

$\boxed{b_{k+1} = b_k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_k r}$, për çdo $k \in \{1,2,...,n$ -1}.

I fundit tregon në faktin se shlyerjet formojnë progresion gjeometrik, me anëtarin e parë, shlyerja e parë, b_1 dhe herësi, faktori i kamatës r. Edhe k-1 më shumë, çdo shlyerje mund të njehsohet me formulën $\boxed{b_k = b_1 r^{k-1}}$.

Vërejtja 1. Duke e përfshirë tabelën e parë *i/i*, për shlyerjen vlen $\boxed{b_k = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^{k-1}}$

1. Kredia amortizohet me anuitetet tremujore të barabarta dhe kamatizim tremujor. Cakto shlyerjen e pestë, nëse e nënta është 2343,322 denarë.
Norma e kamatës është 8% *p.a.(d)*.

Dihet shlyerja b_9 = 2343,322, por e kërkojmë b_5. Prej vetisë të progresioni gjeometrik $b_5 = b_1 r^4$ Kurse $b_9 = b_1 r^8$. Faktori i kamatës $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$. Herësi i pagesave të cilat i shqyrtojmë është $\frac{b_9}{b_5} = \frac{b_1 r^8}{b_1 r^4} = r^4$, pra prej këtu për shlyerjen e pestë vlen:

$$b_5 = \frac{b_9}{r_4} = \frac{2343{,}322}{1{,}02^4} = 2164{,}87 \text{ denarë.} ◆$$

Parashtrohet pyetja, se si të caktohen shlyerjet nëse nuk është e njohur shlyerja e parë, por kredia ose anujiteti, sikurse që edhe realisht ndodh. Për tu përcaktuar shlyerjet nëpërmjet kredisë Z , mjafton të vërejmë se kredia është shumë e të gjitha shlyerjeve. Kështu,

$$Z = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 + b_1 r + b_1 r^2 + ... + b_1 r^{n-1} = b_1\left(1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}\right),$$

Ku shprehja në kllapa është progresion gjeometrik me anëtarin e parë 1 dhe herësin r. Atëherë,

$$\boxed{Z = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Vërejtja 2. Duke zëvëndësuar shprehje $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ me $1 + \mathrm{III}_p^{n-1}$, për kredinë kemi

$$\boxed{Z = b_1\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)}.$$

Prej barazimit të fundit, për shlyerjen të shprehur nëpërmjet kredisë, për numrin e anuiteteve të njohura dhe norma e kamatës kemi:

$$b_1 = Z\frac{r - 1}{r^n - 1},$$

por në rastin e përgjithshëm, shlyerja, k shlyerja njehsohet me formulën:

$$\boxed{b_k = Z\frac{r - 1}{r^n - 1} r^{k-1}}.$$

Me zëvëndësimin e vlerës së kredisë nëpërmjet anujitetit $Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}$, do ta fitojmë formula për shlyerjen e parë nëpërmjet anuitetit:

$$b_1 = Z\frac{r - 1}{r^n - 1} = a\frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}\frac{r - 1}{r^n - 1}$$

ose përfundimisht, a

$$\boxed{b_1 = \frac{a}{r^n}}.$$

Vërejtja 3. Prej të fundit, menjëherë mund të shkruajmë $b_1 = a \cdot \mathrm{II}_p^n$, përkatësisht

$$\boxed{a = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^n}.$$

Në fund, për shlyerjen k, të shprehur nëpërmjet anuitetit, kemi

$$b_k = \frac{a}{r^n} r^{k-1} = \frac{a}{r^{n-k+1}}.$$

Vërejtja 4. Barazimi i fundit, nëpërmjet tabelave i / i mund të shkruajmë në formën

$$\boxed{b_k = a \cdot \mathrm{II}_p^{n-k+1}}.$$

Do të vërejmë edhe se, lidhja ndërmjet anuitetit dhe shlyerjes së fundit është dhënë me $b_n = \frac{a}{r} = a \cdot \mathrm{II}_p^1$, përkatësisht $a = b_n \cdot \mathrm{I}_p^1$.

2. Kredia amortizohet për 5 vjet, me anuitetet të barabarta gjysmëviti dhe kamatizimi gjysmëviti. Cakto shlyerjen e gjashtë, nëse anuiteti është 4120 denarë dhe me normë të kamatës 6% $p.a.(d)$.

Do ta caktojmë së pari shlyerjen, por nëpërmjet saj edhe të gjashtën. E dim se $a = 4120$ denarë $n = 5$,

$m = 2$,pra kredia amortizohet me 10 anuitete, ku faktori i kamatës është $r = 1 + \frac{6}{200} = 1{,}03$. Atëherë, $b_1 = \frac{a}{r^n} = \frac{4120}{1{,}03^{10}} = 3065{,}67$ denarë. Prej këtu, për shkak të vetive të progresionit gjeometrik që e formojnë shlyerjet, shlyerja e gjashtë është $b_6 = b_1 r^5 = 3065{,}67 \cdot 1{,}03^5 = 3553{,}95$ denarë. ◆

3. Sa është anuiteti me të cilin duhet të amortizohet kredia për 6 vjet, me normë të kamatës 4% $p.a.(d)$? Anuiteti dhe kamata janë vjetore, por dihet vetëm shlyerja e katërt e cila është 8479,34 denarë.

Dihet shlyerja e katërtë $b_4 = 8479{,}34$, faktori i kamatës $r = 1{,}04$ dhe numri i anuiteteve 6 . Atëherë prej formulës që direkt i lidh anuitetin dhe shlyerjen kemi $b_4 = b_1 r^3 = \frac{a}{r^6} r^3 = \frac{a}{r^3}$. Në rastin tonë kemi barazim $8479{,}34 = \frac{a}{1{,}04^3}$, prej ku anuiteti është a=9538,09 denarë

Kredia pra është $Z = a\frac{r^6 - 1}{r^6(r-1)} = 9538{,}09\frac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04^6(1{,}04) - 1} = 60000$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto shlyerjen e dhjetë të kredisë, i cili amortizohet me anuitetet të barabarta tremujore dhe kamatizim tremujor, nëse norma e kamatës është 12%$p.a.(d)$, kurse shlyerja e gjashtë është 15000 denarë.

2. Sa është anuiteti, por sa kredia, nëse amortizimi zgjat 4 vjet, me anuitetet të barabarta katërmujore, me normë 9% $p.a.(d)$, me kamatizim katërmujor, nëse shlyerja e dhjetë është 16000 denarë?

3. Kredia amortizohet për 6 vjet me anuitetet të barabarta tremujore dhe kamatizim tremujor. Norma e kamatës është 18% $p.a.(d)$, kurse shuma e shëyerjes së tretë dhe të gjashtë është 40000 denarë. Sa është kredia, por sa është anuiteti?

4. Sa është anuiteti me të cilin duhet të amortizohet kredi për 6 vjet, me normën e kamatës 4%$p.a.(d)$, nëse anuitetet dhe kamatizimi janë vjetore, por dihet se është ndryshimi i shlyerjes së gjashtë dhe të katërtë 691,9 denarë.

5*. Kredi prej 200000 denarë amortizohet për 10 vjet, me anuitetet të barabarta vjetore dhe kamatizim vjetor. Cakto kamatën në vitin e gjashtë, nëse norma e kamatës është 5% *p.a.(d)*. (Udhëzim: njehsoi të gjitha shëyerjet përfundimisht me të pestën).

9. 4. Njehsimi i pjesës së shlyerjes dhe mbetja e kredisë me anuitete të barabarta

Gjatë njehsimit të shlyerjeve, supozim themelor e kishim se kredia është shumë e të gjitha shlyerjeve. Në bazë të kësaj, pjesa shlyrëse prek kredisë për periudhë *k*, përfundimisht me anuitetin *k*, O_k është shuma e shlyerjeve të para *k*, përkatësisht:

$O_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$,

duke zëvëndësuar për shlyerjet e veçanta kemi:

$O_k = b_1 + b_1 r + \ldots + b_1 r^{k-1} = b_1 (1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1})$,

por prej shumës të progresionit gjeometrik në kllapa vijon se pjesa e shlyer prej kredisë, për periudhën k është:

$$\boxed{O_k = b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}}.$$

Vërejtja 1. Duke futur vlerat prej tabelës së tretë *i / i*, për të shlyerën $\boxed{O_k = b_1 \cdot \left(1 + \mathrm{III}_p^k\right)}$.

Kuptohet formula e fundit i korenspondon edhe formulës së fituar paraprakisht për kredinë, nëpërmjet shlyerjeve, kur njehsohet pjesa e shlyer pas periudhës *n*, përkatësisht për $k = n$.

Parashtrohet edhe pyetja sa ësjtë pjesa tjetër prej borxhit. Kuptohet, ai është ndryshimi ndë[rmjet kredisë dhe pjesës së shlyer. Pjasa prej kredisë që ngel të paguhet pas anuitetit *k*, shënohet me R_{n-k} dhe për të kemi:

$$R_{n-k} = Z - O_k = Z - b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}.$$

Nëse e zëvëndësojmë formulën për kredinë nëpërmjet shlyerjes së parë, kemi $R_{n-k} = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} - b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}$, përkatësisht:

$$\boxed{R_{n-k} = b_1 \frac{r^n - r^k}{r - 1}}.$$

Nëse edhe kredia edhe pjesa e shlyer i shprehim nëpërmjet anuitetit, atëherë

$R_{n-k} = a \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)} - \frac{a}{r^n} \frac{r^k - 1}{r - 1}$, përkatësisht $\boxed{R_{n-k} = a \frac{r^n - r^k}{r^n (r - 1)}}$.

Vërejtja 2. Nëse e zëvëndësojmë shprehjen $\dfrac{r^n - r^k}{r^n(r-1)}$, me vlerën përkatëse prej tabelës së katërtë i / i, për mbetjen e borxhit pas anuitetit të paguar k, vlen

$$\boxed{R_{n-k} = a \cdot \mathrm{I}V_p^{n-k}}.$$

1. Kredia prej 30000 denarë duhet të amortizophet për 8 vjet, me normën e kamatës prej 5% *p.a.(d)*, me anuitetet semestrale të barabara dhe kamatizim semestral. Janë paguar 10 anutetet. Sa është mbetja e borxhit?

Kredia amortizohet me gjithsej 16 anuitete. Faktori i kamatës është $r = 1{,}025$. T'i njehsojmë aë pari anuitetet dhe shlyerjen e parë. Kështu, për anuitetin kemi:

$$a = 30000\frac{1{,}025^{16}(1{,}025-1)}{1{,}025^{16}-1} = 2297{,}97$$ denarë, por për shlyerjen e parë

$$b_1 = \frac{a}{r^{16}} = \frac{2297{,}97}{1{,}025^{16}} = 1547{,}97$$ denarë.

Tani, për mebtjen e borxhit kemi:

$$R_6 = b_1\frac{r^{16}-r^{10}}{r-1} = 1547{,}97\frac{1{,}025^{16}-1{,}025^{10}}{1{,}025-1} = 12657{,}5$$ denarë.

Prej mbetjes së njehsuar, mund të njehsojmë edhe pjesën e shlyerjes së kredisë, kemi pikërisht $O_{10} = Z — R_6 = 30000 —12657{,}5 = 17342{,}5$ denarë tani më janë shlyer. ◆

2. Kredia prej 100000 denarë është amortizuar 50 vjet, me normën e kamatës 4% *p.a.(d)* me kamatizim vjetor. Sa është mbetja prej borxhit pas 20 shlyerjeve të anuiteteve vjetore?

Shembullin do ta zgjidhim duke zbatuar tabelat e i / i. Do t'i njehsojmë edhe mbetjen prej borxhit edhe pjesën e shlyer. Për mbetjen e borxhit vlen $R_{30} = a \cdot \mathrm{I}V_4^{30}$. Ta njehsojmë së pari anuitetin.

Për anuitetin kemi $a = Z \cdot V_4^{50} = 100000 \cdot 0{,}046552 = 4655{,}2$, Shlyerja e parë është $b_1 = a \cdot \mathrm{II}_4^{50} = 4655{,}2 \cdot 0{,}140707 = 655{,}02$. Mbetja e borxhit është:

$R_{30} = a \cdot \mathrm{I}V_4^{30} = 4655{,}2 \cdot 17{,}292033 = 80494{,}75$ denarë,

por shlyerja e borxhit është $O_{20} = b_1 \cdot \left(1 + \mathrm{III}_4^{20}\right) = 655{,}02 \cdot 29{,}77807857$ denarë. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Kredia amortozohet gjatë 40 vjetëve, me normën e kamatës 6% *p.a.(d),* me anuitetet gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti. Cakto mbetjen e borxhit pas 30 anuiteteve të të paguara, nëse shlyerja e njëzetë është 1000 denarë.

2. Kredia prej 200000 denarë amortizohet me anuitet gjysmëviti të cilat paguhen gjatë 254 viteve. Norma e kamatës është 8% *p.a.(d)*, me kamatizim gjysmëviti. Sa ëshë borxhi i shlyerjes me anuitet të paguar prej 21 përfundimisht me anuitetin 30? (Cakto ndryshimin O_{30} - O_{20}).

3. Kredia amortizohet gjatë 40 vjetëve, me normën e kamatës 4% *p.a.(d)*, me anuitetet vjetore dhe kamatizim vjetor. Me 25 vitet e shlyerjes, borxhi është zvogëluarpër 40000 denarë. Sa është kredia?

4. Kredia amortizohet gjatë 50 viteve, me normë të kamatës 5% *p.a.(d)*, me kamatizim vjetor. Me anuitetet vjetore prej 21 anitetet dhe përfundimisht me 30 aniutetitn janë shlyer 10000 denarë prej borxhit. Sa është borxhi?

5. Kredia prej 1000000 denarë është amortizuar për 20 vjet, me anuitetet të barabarta gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti. Norma e kamatës është 4% *p.a.(d)*. Sa pjesë e borxhit është shlkyer prej asaj që është paguar pas 10 vjetërve?

9. 5. Njehsimi i normës së kamatës dhe numri i periudhave të amortizimit te kreditë me anutete të barbarta

Sipas formulave për njehsimin e kredisë dhe anuiteteve, mund të shprehet norma e kamatës ose periudhave të amortizimit si madhësi e panjohur, nëpërmjet madhësive tjera të njohura. Në mënyrë të ngjashme sikurse te rentet, me njehsime direkte ose duke shfrytëzuar tabelat *i/i* , nëpër mjet disa detyrave, do të vërejmë se si mundet ta bëjmë.

Një formulë, prej të cilës mundemi të fillojmë është formula për njehsimin e kredisë. Pikërisht, me transformimin e barazimit $Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, pas afatiti të amortizimit n , kemi

$$\frac{Z(r-1)}{a} = 1 - \frac{1}{r^n},$$

prej ku mëtutje kemi $\dfrac{1}{r^n} = \dfrac{a - Z(r-1)}{a}$, përkatësisht:

$$r^n = \frac{a}{a - Z(r-1)}.$$

Nëse e logaritmizojmë barazimin, për afat të amortkizimit n vlen:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a - Z(r-1)}}.$$

Kur bëhet fjalë për njehsimin e normës së kamatës, një mënyrë është të shfrytëzohet $\boxed{Z = a \cdot \mathrm{I}V_p^n}$, por e mundshme është me formulën themelore për kredi nëpërmjet tabelës së katërtë i / i njehsime direkte, nëse barazimet të cilat fitohen kanë metodë të zakonshëm për zgjidhje.

Me siguri, mënyra për interpolimin lienar, tani më disa herë e ilustruam, të njëjtën sipas nevojës mund të shfrytëzohet edhe këtu.

Varësisht prej të dhënave të cilat janë të dhëna te detyrat, përveç atyre të përmendurave, mund të shfrytëzohet cilado tjetër formulë e njohur për njehsimin e afatit të amortizimit dhe normës së kamatës.

1. Për cilën koh, kredia prej 60000 denarë, do të amortizohet me anuitetet të barabarta vjetore prej 4000 denarë, me normë të kmatës prej 4% *p.a.(d)* dhe kamatizim vjetor?

Sipas formulës për njehsimin e kredisë, kemi $Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$. Mundemi direkt të zëvëndësojmë, por të logaritmizojmë në fund. Pikërisht $60000 = 4000\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n(1{,}04-1)}$, prej ku $\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n} = 0{,}6$, përkatësisht $0{,}4 \cdot 1{,}04^n = 1$. Atëherë, $1{,}04^n = 2{,}5$, përkatësisht me logaritmizim, vjetë. Përfundimisht, $n = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}04} = 23{,}36$ koha e amortizimit nuk është numër i plotë, pra 23 log 1,04 anuitetet janë të barabarta, por e 24- ta ndryshon. Për mbetjen e anuitettit do të flasim më vonë. ◆

2. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarta tremujore dhe kamatizim tremujor. Të njehsohjet norma e kamatës nëse e dim se ndryshimi anitetit të shlyerjes së pestë dhe të tretë është 840,64 denarë, por shuma e shlyerjes së tretë dhe të gjashtë është 42889,62 denarë.

Do ta njehsojmë faktorin e kamatës dekurzive. Prej kushteve mund të formojmë sistem të barazimeve:

$$\begin{cases} b_5 - b_3 = 840{,}64 \\ b_6 + b_3 = 42889{,}62 \end{cases}.$$

Do t'i zhvillojmë sipas shlyerjes së parë dhe faktorit të kamatës. Fitojmë sistem ekuivalent

$$\begin{cases} b_1 r^4 - b_1 r^2 = 840{,}64 \\ b_1 r^5 + b_1 r^2 = 42889{,}62 \end{cases},$$ prej të cilit duke pjesëtuar barazimet kemi

$\dfrac{b_1 r^2(r^2-1)}{b_1 r^2(r^3+1)} = \dfrac{840{,}64}{42889{,}62} = 0{,}0196$. Barazimi i fundit, pas thjeshtimit, sillet në formën e barazimit $\frac{(r-1)(r+1)}{(r+1)(r^2-r+1)}=0{,}0196$, prej ku $\frac{r+1}{r^2-r+1}=0{,}0196$. Ky është barazim katror sipas faktorit të kamatës

$0{,}0196r^2 - 1{,}0196r + 1{,}0196 = 0$,

me zgjidhjet $r_1 = 1{,}02$ dhe $r_2 = 51$. Vlera e dytë nuk ka kuptim për faktorin e kamatës, por prej të parës është e qartë se $1+\frac{p}{400}=1{,}02$, përkatësisht $p = 8\%$ *p.a.(d)*. ◆

3. Me cilën normë të kamatës kredia prej 40000 denarë do të amortizohet për 10 vjet, me anuitetet të barabarta vjetore prej 4550 denarë dhe kamatizim vjetor?

Pasi e dimë edhe kredinë edhe anuitetin, do të nisemi prej formulës themelore $Z = a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$, përkatësisht $Z = a\cdot \mathrm{I}V_p^{10}$. Prej këtu, vlera e tabelës së katërtë *i/i* për $n = 10$ është $\mathrm{I}V_p^{10} = 8{,}79120879$. Lexojmë te tabela, ku numri i rreshtit për $n = 10$ nuk e gjejmë. Atëherë, patjetër të interpelojmë. Të dhënat janë shkruar në tabelë.

$\mathrm{I}V_p^{10}$	p	$\mathrm{I}V_p^{10}$	p
8,86621634	2,25%	8,86621634	2,25%
7,75206393	2,5%	8,79120879	p
0,11415241	– 0,25%	0,07500755	$2{,}25 - p$

E formojmë proporcionin prej ndryshimeve të fituara:

0,11415241 : 0,25 = 0,07500755 : $(p - 2{,}25)$, prej ku $p - 2{,}25 = 0{,}16$, $p = 2{,}41\%$ *p.a.(d)*.

Deri te rezulati i njëjtë arrihet edhe nëse shfrytëzohet tabela e pestë *i / i*, te e cila $V_p^{10} = 0{,}011375$, por e shfrytëzojmë formulën $a = Z\cdot V_p^{10}$. ◆

Detyra për punë të pavarur

1. Me cilën normë të kamatës, për 5 vjet, do të amortizohet kredia prej 60000 denarë, me anuitetet tremujore prej 3669,42 denarë?

2. Për cilën kohë, do të shëyejmë kredinë prej 200000 denarë me anuitet gjysmëviti prej 9310,04 denarë, me normë të kamatës 8% *p.a.(d)*, me kamatozim gjysmëviti?

3. Me cilën normë të kamatës, kredia prej 1000000 denarë, do të amortizohet me anitetet vjetore prej 61776,61 denarë, për 25 vjet?

4. Me cilën normë të kamatës vjetore amortizohet kredia prej 119200 denarë, me anuitet vjetor 13700 denarë, për 11 vjet me kapitalizimin vjetor?

5. Kredia prej 400000 denarë shlyhet me anuitetet të barabarta semestrale prej 24462,68 denarë. Njehso kohën e shlyerjes së kredisë, nëse norma e kamatës është 4% *p.a.(d)* dhe kamatizimi gjysmëviti.

9. 6. Plani amortizues për kredinë me anuitete të barabarta

Kur kredia prej Z denarë, amortizohet me anuitetet të barabarta, atëherë në fund të çdo periudhe, borxhliu duhet të paguan sasi të barabarta të cilat përbëhen prej **dy pjesë, pjesa për shlyerje dhe pjesa për kamatën për pjesën që ka ngelur.**

Periudha	Mbetja prej kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	Z	$i_1 = Zp/100$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = R_{n-1}p/100$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = R_2 p/100$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = R_1 p/100$	$b_n = a - i_n$	a

Gjatë kësaj mënyre të pagesës së kredisë, në çdo periudhë të ardhshme, zmadhohet pjesa e shlyerjes së kredisë, por zvogëlohet pjesa për kamatën e borxhit që ka ngelur. Shlyerja e borxhit kryhet sipas planit prej më parë të caktuar, plani i amortizimit, i cili për shkak të dukshmërisë më të madhe paraqitet me tabelë.

Radhitja sipas shtyllave mund të dallohet prej kësaj tabele të përmendur, por e nevojshme është të jenë të përfaqësuara të gjitha shtyllat.

Për shembull, do të tregojmë se si kryhet punimi i planit të amortizimit, hap pas hapi, dhe në fund do ta plotësojmë tabelën.

1. Kredi prej 100000 denarë amortizohet me anuitetet të barabarta vjetore gjatë 5 viteve, me normë të kamatës 4% *p.a.(d)* dhe kamatizim vjetor. Përpuno planin e amortizimit për shlyerjen e kredisë.

Kamatizimi është vjetor me faktorin e kamatës r = 1,04. Gjithsej ka 5 anuitete.

Vlera e anuiteteve është $a = 100000\dfrac{1{,}04^5(1{,}04)-1}{1{,}04^5-1} = 22462{,}8$ denarë.

- mbetja e parë është tërë borxhi $R_5 = Z = 100000$ denarë;

- kamata e parë është $i_1 = \dfrac{Zp}{100} = 100000\dfrac{4}{100} = 4000$ denarë – kamata e tërë borxhit;

- shlyerja e parë $b_1 = a - i_1$ = 22462,8 - 4000 = 18462,8 denarë;
- mbetja e dytë sipas njëriit anuitet të pagesës, në fund të vitit të parë është:
$R_4 = Z - b_1$ = 100000 -18462,8 = 81537,2 denarë;

- kamata e dytë është $i_2 = \frac{R_4 p}{100} = 81537,2 \frac{4}{100} = 3261,5$ denarë – kamata pët mbetjen e dytë;

- shlyerja e dytë është $b_2 = a - i_2$ = 22462,8 - 3261,5 = 19201,3 denarë;
- mbetja e tretë sipas dy anuiteteve të paguara, në fund të vitit të dytë është:
$R_3 = R_4 - b_2$ = 81537,2 -19201,3 = 62335,9 denarë;

- kamata e tretë është $i_3 = \frac{R_3 p}{100} = 62335,9 \frac{4}{100} = 2493,44$ denarë – kamata për mbetjen e dytë;

- shlyerja e tretë është $b_3 = a - i_3$ = 22462,8 - 2493,44 =19969,36 denarë;
- mbetja e katërtë pas tre anuiteteve të paguara, në fund të vitit të tretë është:
$R_2 = R_3 - b_3$ = 62335,9 -19969,36 = 42366,5 denarë;

- kamata e katërtë është $i_4 = \frac{R_2 p}{100} = 42366,5 \frac{4}{100} = 1694,66$ denarë – kamata për mbetjen e tretë;

- shlyerja e katërtë është *b4 = a - i4 =* 46 ,8 -1694,66 = 0768,14 denarë;
- mbetja e pestë sipas anuitetit të pagesës së katërtë, në fund të vitit të katërtë është:
$R_1 = R_2 - b_4$ = 42366,5 - 20768,1 = 21598,4 denarë;

- kamata e pestë është $i_5 = \frac{R_1 p}{100} = 21598,4 \frac{4}{100} = 863,9$ denarë – kamata për mbetjen e katërtë;

- shlyerja e pestë është $b_5 = a - i_5$ = 22462,8 - 863,9 = 2 598,4 denarë;
- mbetja e gjashtë sipas anuitetit të paguar është:
$R_0 = R_1 - b_5$ = 21598,4 - 21598,4 = 0 denarë – që do të thotë se borxhi është paguar.

Kështu vlerat e njehsuar do t'i vendosim në tabelë.

Periudha	Mbetja prej kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	100000	4000	18462,8	22462,8
2	81537,2	3261,5	19201,3	22462,8
3	62335,9	2493,44	19969,36	22462,8
4	42366,5	1694,66	20768,14	22462,8
5	21598,4	863,9	21598,4	22462,8
сума	307838	12313,5	100000	

Pas përpilimit të planit të amortizimit, është e nevojshme të kryejmë provën për saktësinë e planmit të amortizimit:

kushti 1. Shuma e të gjitha shlyerjeve duhe të jetë e barabartë me kredinë $\sum b_j = Z$;

kushti 2. Shlyerja e fundit duhet të jetë e barabartë me mbetjen e fun dit, $b_n = R_{1;}$

kushti 3. Shuma e shtyllave të kamatave dhe shtylla të shlyerjeve duhe të jetë e barabartë me prodhimin e numrit të periudhave të amortizimit dhe anuitetit, $\sum i_j + \sum b_j = na$;

kushti 4. Anuitet është shuma e çdo kamaete dhe shlyerja përkatëse, $a = b_j + i_j$;

kushti 5. Shuma e shtyllave të kamatave është e barabartë me kamatën të njehsuar në shumën e shtyllave kredi mbetje $\sum i_j = \frac{p}{100}\sum R_j$.

Te shembulli lehtë provohet se janë të këlnaqur të gjitha këto kushte. Kështu te shtylla për shlyerje është 100000 denarë, sa është kredia. Shlyerja e fundit dhe mbetja e fundit janë të barabarta.

Pastaj, $\sum i_j + \sum b_j = 12313{,}5 + 100000 = 112313{,}5 = 5 \cdot 22462{,}8 = 112314$. Gjithashtu, anuiteti është shumë e shlyerjeve përkatëse dhe kamata, shembull p.r anuitetin e katërt vlen 1694,66 + 20768,14 = 22462,8. Përfundimisht $12313{,}5 = 307838 \cdot \frac{4}{100} = 12313{,}52$, pra është i kënaqur edhe i fundit, kushti i pestë. ◆

2. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarta tremujore dhe kamatizimi tremujor. Norma e kamatës është 8% *p.a.(d)*. Formo plan të amortizimit për tre periudhat e fundit, nëse kamata në periudhën e dytë është 496,48 denarë, por kamata në periudhën e pestë është 371,61 denarë.

Në këtë detyrë, plani i amortizimit do të sillet vetëm në tre anuitetet e fundit. Për fillim nuk kemi informatë as sa anuitetet janë shlyer. T'i shkruajmë kushtet të cilët i kemi $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$ dhe $\begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases}$.

Do ta zgjidhim sistemin e shlyerjes së parë dhe anuiteti.

$$\begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_2 = 496{,}48 \\ a - b_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_1 r = 496{,}48 \\ a - b_1 r^4 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1{,}02 b_1 = 496{,}48 \\ a - 1{,}02^4 b_1 = 371{,}61 \end{cases}.$$

Duke i zbritur barazimet prej sistemit, kemi $(1{,}02^4 - 1{,}02)b_1 = 124{,}8$, përkatësisht $b_1 = 2000$ denarë dhe $a = 2536{,}48$ denarë.

Më tutje, që ta gjejmë numrin e periudhave për amortizim, do ta shfrytëzojmë formulën për shlyerjen e parë $b_1 = \frac{a}{r^{4n}} = \frac{a}{1{,}02^{4n}}$.

Atëherë, $1{,}02^{4n} = \frac{2536{,}48}{2000} = 1{,}26824$, prej ku duke logaritmuar $4n = \frac{\log 1{,}26824}{\log 1{,}02} = 12$.

Domethënë, kredia amortizohet me 12 anuitetet, gjatë 3 viteve.

Tre shlyerjet e fundit mundemi t'i njehsojmë sipas formuilës dhe atë:

$b_{10} = b_1 r^9 = 2000 \cdot 1{,}02^9 = 2390{,}19$, $\quad b_{11} = b_1 r^{10} = 2000 \cdot 1{,}02^{10} = 2437{,}99$ dhe $b_{12} = b_1 r^{11} = 2000 \cdot 1{,}02^{11} = 2486{,}74$.

T'i caktojmë edhe mbetjet përkatëse.

Mbetja e nëntë është $R_{12-9} = R_3 = a\frac{r^{12} - r^9}{r^{12}(r-1)} = 2536{,}48\frac{1{,}02^{12} - 1{,}02^9}{1{,}02^{12}(1{,}02-1)} = 7314{,}91$ denarë, mbetja e dhjetë është $R_{12\text{-}10} = R_2 = R_3 - b_{10} = 4924{,}72$ denarë dhe mbetjae njëmbëdhjetë është $R_{12\text{-}11} = R_1 = R_2 - b_{11} = 2486{,}74 = b_{12}$. Kamatat njehsohen ose nëpërmjet mbetjeve, ose edhe më lehtë $i_j = a - b_j$, pra $i_{10} = a - b_{10} = 146{,}29$, $i_{11} = a - b_{11} = 98{,}49$ dhe $i_{12} = a - b_{12} = 49{,}73$. Ta formojmë tabelën për planin e amortizimit:

Periudha	Mbetja	Kamata	Shlyerja
10	7314,91	146,29	2390,19
11	4924,72	98,49	2437,99
12	2486,74	49,73	2486,74

Nuk mund të kryejmë provë pasi nuk e kemi tërë planin.

Detyra për punë të pavarur

1. Kredia prej 100000 denarë amortizohet përн 6 vjet me anuitetet të barabarta vjetore dhe kamatizim vjetor. Norma e kamatës vjetore është 4% *p.a.(d)*. Njehsi anuitetin dhe bën planin e amortizimit.

2. Formo plan të amortizimit për kredi prej 80000 denarë, i cili duhet të amortizohet për 6 vjet me anuitetet të barabarta vjetore dhe kamatizim vjetor. Norma e kamatës vjetore është 5% *p.a.(d)*.

3. Kredia prej 100000 denarë amortizohet për 6 vjet me anuitetet të barabarta vjetore dhe kamatizim vjetor. Norma e kamatës vjetore është 8% *p.a.(d)*. Njehso anuitetin dhe bën plain e amortizimit.

4. Kredia prej 10000 denarë amortizophet për 4 vjet me anuitetet të barabarta vjetore dhe kamatizim vjetor. Norma e kamatës vjetore është 10% *p.a.(d)*. Njehso anuitetin dhe bën plain e amortizimit.

5. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarta gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti. Formo plan të amortizimit, nëse shlyerja e parë është 20000 denarë, kamata në periudhën e fundit është 3221,02 denarë dhe kamata në periudhën e parafundit është 6149,22 denarë.

9. 7. Kredi me rrumbullakim të anuiteteve

Anuiteti *a*, të kredisë së caktuar, mund të jetë dhënë në sasinë konkrete ose pra si përqindje e kredisë. Këto anuitete më së shpeshti rrumbullakohen në numra të plotë (dhjetëshe, qindëshe etj.), kurse prej këtu quhen edhe **rrumbullakimi i anuiteteve,** por kreditë janë **kredi me rrumbullakim të anuiteteve.** Nëse anuiteti nuk është dhënë në njërën prej mënyrave të lartëpërmendur, por ekziston kusht kredia të amortizohet duke rrumbullakuar anuitetin, atëherë është e nevojshme të njehsohet përqindja për njehsimin e anuitetit. Edhe këtu do të flasim për kreditë dekurzive, me shlyerje në fund të periudhës së amortizimit dhe me njehsimin dekurziv të kamatës. Më së shpeshti është dhënë kredia, periudhar e amortizimit dhe norma e kamatës, por me rrumbullakimin e vlerës, por pastaj të caktohet edhe anuiteti i fundit i ndryshueshëm prej të tjerëve.

Le të jenë dhënë lartësi e kredisë Z, norma e kamatës $p\%$ *p.a.*(d). Nëse dihet numri i periudhave të amortizimit, atëherë kërkohet përqindja p_1 e cila gjendet ndërmjet 100 V_p^n dhe $100V_p^{n-1}$, që del prej faktir se duhet të kryhen n -1 shlyerje me anuitete të barabarta dhe n shlyerjaa me anuitet a_1 më të vogël se të tjerat. Anuitetet e rrumbullakuara janë më të mëdhaja prej anuiteteteve të abarabarta, pra anuiteti i fundit është i ndryshueshëm prej të tjerëve, më i vogël se ato dhe quhet **mbetja e anuitetit.**
Domethënë, nëse nuk e dim anuitetin e rrumbullakuar, ai shprehet në përqindje p_1 prej krdisë, më së shpeshti numër i plotë ose me formulën $\boxed{a=\frac{p_1Z}{100}}$, ku vlen:

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}<p_1<100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}}.$$

1. Kredia prej 130000 denarë amortizohet për 6t vjet, me normë të kamatës 5% *p.a.(d)*, me rrumbullakim të anuitetit semestral dhe kamatizimi semestral. Njehso anuitetin e rrumbullakuar.

Faktori i kamatës është $r=1+\frac{5}{200}=1{,}025$, kurse numri i anuiteteve $6\cdot 2=12$. Përqindjen p_1 do ta caktojmë në pajtim me jobarazimin e dhënë:

$$100\frac{1{,}0025^{12}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1}<p_1<100\frac{1{,}025^{11}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1},\ \text{përkatësisht}$$

$9{,}74\% < p_1 < 10{,}51\%$.

Për përqindjen p_1 do të zgjedhim vlerë p_1 = 10%, përqindje ndërmjet kufijve të fituar, por përsëri numër i plotë dhe i përshtatshëm për njehsime të mëtutjeshme.

Anuiteti përkatës i rrumbullakuar do të jetë

$$a = \frac{p_1 Z}{100} = \frac{10}{100} 130000 = 13000 \text{ denarë.}$$

Në rastin e anuitetit të fituar të mos jetë numër i plotë, i njëjti të rrrumbullakohet në dhjetëshe ose qindëshe.

Mund të ndodh, të mos ta dim anuitetin e rrumbullakuar, por të dëshirojmë ta njehsojmë numrin e periudhave të amortizimit. Të njëjtin mundemi ta njehsojmë sikurse te kreditë me anuitete të barabarta $n = \frac{1}{\log r} \log \frac{a}{a - Z(r-1)}$, vetëm që e shfrytëzojmë vlerën e njohur rë anuitetit të rrumbullakuar. Kur vlerën e fituar për periudha të amortizimit n nuk është numër i plotë, e marrim numrin natyror më të madh se numri i fituar.

Edhe këtu, anuiteti n ,a_1 dallohet prej të tjerëve. ◆

2. Kredia prej 200000 denarë amortizohet me anuitetin e rrumbullakuar gjysmëviti prej 40000 denarë dhe kamatizimi gjysmëviti. Norma e kamatizimit është 10% *p.a.(d)*. Për sa periudha do të amortizohet kredia?

Anuiteti i rrumbullakuar është dhënë sipas sasisë absolute, që njëkohësisht paraqet $\frac{40000}{200000} = 20\%$ prej kredisë. Faktori i kamatës dekurzive është r = 1,05. Atëherë për numrin e periudhave të amortizimit vlen

$n = \frac{1}{\log 1{,}05} \log \frac{40000}{40000 - 200000(1{,}05 - 1)} = 5{,}896$, por prej këtu do të amortizohet për 6 vjet, me 5 anuitetete nga 40000 denarë, por i gjashti dallohet dhe është më i vogël se 40000 denarë. ◆

Parashtrohet pyetja sa është anuiteti i cili dallohet prej atij që është rrumbullakuar, përkatësisht sa është **anuiteti i fundit** ose se si përndryshe quhet **mbetja e anuitetit.**

Në të njëjtën mënyrë sikurse te mbetja e rentës i diskontinojmë anuitetet, kurse shuma e vlerave të diskontunuara e përcaktojnë kredinë Z .

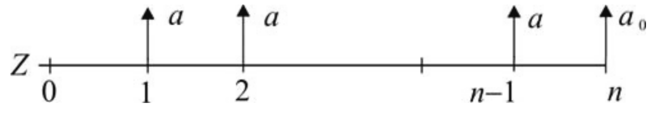


Fig. 2

Në pajtim me boshtin kohor të ulustruar (fig. 2) , për kredinë kemi

$$Z=\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\frac{a}{r^3}+\ldots+\frac{a_1}{r^n}=\frac{a}{r}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-2}}\right)+\frac{a_1}{r^n}.$$

Shprehja në kllapa paraqet shumë të n -1 anëtarëve të njëpasnjëshëm të progresionit gjeometrik, me anëtar të parë1 dhe herës $\frac{1}{r}$. Prej këtu,

$$Z=\frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}}+\frac{a_1}{r^n}=\frac{a}{r}\frac{\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}}}{\frac{r-1}{r}}+\frac{a_1}{r^n}=a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}+\frac{a_1}{r^n}.$$

Tani, për anuitetin e fundit kemi:

$$\boxed{a_1=\left[Z-a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n}.$$

Vërejtja 1. Nëse shprehja $\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ e zëvëndësojmë me vlerën përkatëse prej tabelave financiare IV_p^{n-1} për anuitetin e fundit vlen

$$\boxed{a_1=\left[Z-a\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]r^n=\left[Z-a\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]\cdot \mathrm{I}_p^n}.$$

Vërejtja 2. Vetitë e shlyerjes dhe anuitetet te kreditë me anuitet të rrumbullakuar janë të njëjta sikurse te kredia me anuitetet të barabarta. Shlyerjet formojnë progresion gjeometrik, me anëtarin e parë, shlyerja e parë, b_1 dhe herësi i faktorit të kamatës r . Dhe sigurisht, anuiteti është shumë e shlyerjeve dhe kamatës përkatëse.

3. Kredia prej 10000 denarë, amortizohet me anuitet vjetor prej 2500 denarë me normë të kamatës 4% *p.aid*) dhe kamatizim vjetor. Njehso për sa vjet do të amortizohet kredia dhe sa është mbetja e anuitetit.

Faktori i kamatës dekurzive është r = 1,04, por anuitetet do t'i njehsojmë si anuitete të rrumbullakuara. Për numrin e periudhave të amortizimit kemi $n=\frac{1}{\log 1{,}04}\log\frac{2500}{2500-10000(1{,}04-1)}=4{,}445$. Atëherë , paguhen 5 anuitetet, prej të cilëve katër të paravt nga 2500 denarë, kurse i fundit është i ndryshueshëm dhe me sasi:

$$a_1=\left[Z-a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n=\left[10000-2500\frac{1{,}04^4-1}{1{,}04^4(1{,}04-1)}\right]1{,}04^5=1125{,}72 \text{ denarë.} \blacklozenge$$

Detyra për punë të pavarur

1. Kredia amortizohet për 5 vjet me anuitet të rrumbullakuar tremujor dhe kmatizim tremujor, me normë të kamatës 40% *p.a(d)*. Cakto kredinë, nëse kamata te periudha e dytë është 4000 denarë, kurse shlyerja e pestë është 14641 denarë.

(Udhëzim: Kredinë njehsoe nëpërmjet rrumbullakimit të anuitetit dhe përqindjes $p_{1)}$

2. Kredia prej 128000 denarë amortizohet me anuitetin e rrumbullakuar vjetor dhe kamatizimin vjetor, me normën e kamatës 7% *p.a(d)*. Për sa kohë do të amortizohet kredia, nëse anuiteti i rrumbullakuar është 12000 denarë?

3. Për sa periudha do të amortizohet kredia, i cili paguhet me rrumbullakimin e anuitetit katërmujor dhe gjithashtu kamatizim të atillë, me normën e kamatës, 12% *p.a(d)*? Anuiteti i rrumbullakuar është 30000 denarë, por shlyerja e parë është 12000 denarë.

4. Kredia amortizohet për dy vjet me anuitet të rrumbullakuar gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti. Sa është kredia, por sa është anuiteti i rrumbullakuar, nëse mbetja e anuitetit është 14317,9 denarë, por shlyerja e fundit 13767,2 denarë?

5. Kredia amortizohet për 7 vjet me anuitet të rrumbullakuar gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti, me normë të kamatës 8% *p.a.(d)*. Cakto kredinë dhe anuitetin e rrumbullakuar, nëse mbetja e anitetit është 249,36 denarë.

9. 8. Plani i amortizimit për kredi me anuitet të rrumbullakuar

Përpunimi i planit të amortizimit për kredi me anuitet të rrumbullakuar, është në të një[jtën mënyrë sikrse te kreditë me anuitetet të barabarta, përveç në rreshtin e fundit, ku shkruhet anuiteti i fundit i ndryshueshëm. Poashtu edhe shlyerja e fundit është më e vogël se të tjerat. Së pari të njehsohen madhësitë e nevojshme, por pastaj plotësohet tabela e amortizimit.

1. Kredia prej 1000000 denarë amortizohet me anuitet vjetor, me normë të kamatës 20% *p.a.(d)* dhe kamatizim vjetor. Afati i shlyerjes është 5 vjet. Përpuno plan të amortizimit nëse kredia ka anuitet të rrombullakuar.

Kredia amortizohet me 5 anuitetet, me faktorin e kamatës $r = 1{,}2$. Ta njehsojmë anuitetin e rrumbllakuar, duke njehsuar përqindjen me cilin anuitet është paraqitur si pjesë e kredisë. Prej jobarazimit që duhet të jetë i kënaqur me përqindjen p_1 ,

$100\dfrac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\dfrac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}$, me zëvëndësimin të të dhënave kemik:

$$100\frac{1{,}2^5(1{,}2-1)}{1{,}2^5-1} < p_1 < 100\frac{1{,}2^4(1{,}2-1)}{1{,}2^4-1},$$ përkatësisht:

$33{,}44 < p_1 < 38{,}63$.

Do të zgjedhim p_1 = 35%, edhe pse mund të zgjedhet çfarëdo vlerë te kufijtë e përmendur. Atëherë, anuiteti i rrumbnullakuar është $a = \frac{35}{100}\cdot 1000000 = 350000$ denarë. Katër, prej pesë anuiteteve janë me sasi 350000 denarë, por anuiteti i fundit është

$$a_1 = \left[1000000 - 350000\frac{1{,}2^4-1}{1{,}2^4(1{,}2-1)}\right]1{,}2^5 = 233760 \text{ denarë.}$$

T'i kryejmë njehsimet e veçanta:

- mbetja e parë është tërë borxhi $Z = R_5$ = 1000000;
- kamata e parë është kamata për mbetjen e parë, $i_1 = \frac{20}{100}R_5 = 200000$ denarë;
- shlyerja e parë është $b_1 = a - i_1$ = 350000 - 200000 = 150000 denarë;
- mbetja e dytë është $R_4 = R_5 - b_1$ = 850000 denarë;
- kamata e dytë është kamata për mbetjen e dytë, $i_2 = \frac{20}{100}R_4 = 170000$ denarë;
- shlyerja e dytë është $b_2 = a - i_2$ = 350000 -170000 = 180000 denarë;
- mbetja e tretë është e $R_3 = R_4 - b_2$ = 670000 denarë;
- kamata e tretë është $i_3 = \frac{20}{100}R_3 = 134000$ denarë;
- shlyerja e tretë është $b_3 = a - i_3$ = 350000 -134000 = 216000 denarë;
- mbetja e katërtë është $R_2 = R_3 - b_3$ = 454000 denarë;
- kamata e katërtë është $i_4 = \frac{20}{100}R_2 = 90800$ denarë;
- shlyerja e katërtë është $b_4 = a - i_4 = 350000 - 90800 = 259200$ denarë;
- mbetja e pestë është $R_1 = R_2 - b_4$ = 194800 denarë;
- Kamata e pestë është $i_5 = \frac{20}{100}R_1 = 38960$ denarë;
- shlyerja e pestë është $b_5 = a_1 - i_5 = 233760 - 38960 = 194800$ denarë, pasi anuiteti i fundit dallohet ose pra mundet direkt me $b_5 = Z - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 194800$ denarë.

Tabela përkatëse për amortizim të kredisë është:

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	1000000	200000	150000	350000
2	850000	170000	180000	350000
3	670000	134000	216000	350000
4	454000	90800	259200	350000
5	194800	38960	194800	233760
сума	3168800	633760	1000000	

Edhe këtu duhet të kryhet prova e planit të amortizimit dhe atë:

kushti 1. Shuma e të gjitha shlyerjeve duhet të jetë e barabartë me kredinë $\sum b_j = Z$;

kushti 2. Shlyerja e fundit duhet të jetë e barabartë me mbetjen e fundit, $b_n = R_{1;}$

kushti 3. Anuiteti i rrumbullakuar është shumë e çdo kamate dhe shlyerjen përkatëse, $a = b_j + i_j$, përveç të fundit që është i barabartë me mbetjen e anuitetit dhe kamatës përkatëse. ◆

2. Formo plan të amortizimit për katër periudhat e fundit, për kredinë që është amortizuar për tre vjet, me anuitet të rrumbullakuar tremujor, normë të kamatës 8% *p.a.(d)* dhe kamatizim tremujor. Anuiteti i rrumbullakuar është 10000 denarë.

Duhet ta caktojmë kredinë, që ta kemi edhe mbetjen e parë. Te anuiteti i rrumbullakuar $a = \frac{p_1}{100} Z$, pra kemi nevojë për përqindjen .Vlen jobarazimi $100\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1} - 1}$.

Në këtë rast, kemi gjithsej nm = 12 periudha, faktori i kamatës $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$, por prej këtu $100\frac{1{,}02^{12}(1{,}02-1)}{1{,}02^{12} - 1} < p_1 < 100\frac{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}{1{,}02^{11} - 1}$, përkatësisht 9,46 $< p_1 <$ 10,22. Atëherë, $p_1 = 10\%$ prej ku vijin se $Z = \frac{100}{p_1} a = 100000$ denarë. Mbetja e anuitetit është:

$$a_1 = \left[100000 - 10000\frac{1{,}02^{11} - 1}{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}\right]1{,}02^{12} = 2703{,}28 \text{ denarë.}$$

Që të arrijmë deri te katër shlyerjet e fundit, ta caktojmë të parën $b_1 = a - i_1 = 10000 - \frac{8}{400} \cdot 100000 = 8000$. Tani, prej faktorit të shlyerjes janë anëtarët e progresionit gjeometrik, kemi

$$b_9 = b_1 r^8 = 8000 \cdot 1{,}02^8 = 9373{,}27 \text{ },b_{10} = b_1 r^9 = 8000 \cdot 1{,}02^9 = 9560{,}74 \text{ },$$

$b_{11} = b_1 r^{10} = 8000 \cdot 1{,}02^{10} = 9751{,}96$, por shlyerja e fundit nuk është anëtar i progresionit, pra patjetër të njehsohet ndryshe. Pikërisht, një mënyrë është prej formlës $a_1 = b_{12} r$, përkatësisht $b_{12} = \frac{a_1}{r} = 2650{,}27$ denarë. Edhe pse, është e mundshme të arrijmë deri te shlyerja e fundit dhe gradualisht. Ta caktojmë mbetjen pas tetë shlyerjeve të anuiteteve, direkt duke zvogëluar kredinë për tetë shlyerjet e para:

$$R_4 = Z - \left(b_1 + b_1 r + b_1 r^2 + \ldots + b_1 r^7\right) = Z - b_1 \frac{r^8 - 1}{r - 1}$$

$$= 100000 - 8000 \frac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 31336{,}24 \text{ denarë.}$$

Ta formojmë tani planin e amortizimit për katër periudhat e fundit.

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
9	31336,24	627,72	9373,27	10000
10	21962,7	493,54	9560,24	10000
11	12401,7	248,04	9751,96	10000
12	2650,27	53	2650,27	2703,28

Detyra për punë të pavarur

1. Për cilën kohë, kredia prej 60000 denarë do të amortizohet me anuitetet e rrumbullakuara vjetore prej 4000 denarë me normë të kamatës vjetore 4% *p.a.(d)* dhe kamatizim vjetor. Njehso anuitetin e fundit dhe shlyerjen e fundit, por pastaj planin e amortizimit.

2. Të formohet plani i amortizimit të kredisë prej 20000 denarë, me normë të kamatës vjetore prej 4% *p.a.(d),* që amortizohet për katër vite me anuitet të rrumbullakuar gjysmëviti të 3000 denarë, me kamatizim gjysmëviti.

3. Kredia prej 8000 denarë amortizohet me anuitet vjetor që është 35% prej kredisë, me normë të kamatës 5% *p.a.(d)* dhe kamatizim vjetor. Formo olan të amortizimit dhe njehso anuitetin e fundit.

4. Formo plan të amortizimit për kredi prej 200000 denarë, i cili duhet të amortizojhet për katër vjet, me anuitet të rrumbullakuar vjetor, me normë të kamatës 4% *p.a.(d)* dhe kamatizim vjetor.

5. Kredia amortizohet për tre vjet me anuitet të rrumbullakuar për tre vjet. Kamatizimi është gjysmëviti me normën e kamatës 4% *p.a.(d)*. Formo plan të amortizimit nëse shlyerja e fundit është 1265,51 denar.

9. 9. Detyra për ushtrime

1. Kredia prej 240000 denarë amortizohet për 4 vjet, me anuitetet të barabarta të gjysmëvititi dhe kamatizim të gjysmëvitit. Sa është anuiteti, nëse norma e kamatës është 9% *p.a.(d)* ? Sa është gjithsej kamata e njehsuar?

2. Janë marrë dy kredi, çdonjëri prej tyre me anuitetet të barabarta. Kredia e parë prej 160000 denarë amortizohet për 4 vjet, kurse i dti për 6 vjet. Sa është kredia e dytë nëse edhe të dy kreditë amortizohen me anuitet të gjysmëvitit dhe kamatizim gjysmëviti me të njëjëtn normë të kamatizimit 4% *p.a.(d)?*

3. Një kredi është për 100000 denarë më i madh se tjetri. I pari amortizohet për 12 vjete, me anuitetet të brabartë nga 20000 , kurse tjetri për 10 vjet, gjithashtu me anuitetet të barabarta. Sa është anuiteti i kredisë, nëse për të dy kreditë është zbatuar norma e kamatës prej 5% *p.a.(d)*? Vërejtej: $Z_1 = Z_2 + 100000$.

4. Kredia amortizohet për 9 vjet me anuitedtet të barabarta katërmujore dhe kamatizim katërmujor. 12% *p.a.(d),* kurse ndryshimi i shlyerjes së pestë dhe të dytë është 12000 denarë. Njehso anuitetin.

5. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarta mujore dhe me kamatizim mujor dhe kamatizim mujor. Norma e kamatës është 24% *p.a.(d),* kurse kamata e fundit është 300 denarë. Njehso aniutett e kredisë.

6. Shjlyerja e katërtë e kredisë me të cilin amortizohet gjastë 6 vjetëve, me anuitetet të barabarta të gjysmëvitit dhe kamatizim gjysmëviti, me normën e kamatës prej 10% *p.a.(d),* është 34038,22 deenarë. Njehso kredinë, mbetjen e borxhit, gjkysmën e afatit tës shlxyerjes dhe kamatë së përgjithshmenje.

7. Kredia prej 200 000 amortizohet për 26 vjet, me anuitet i cili paguhet çdo vit të dytë, me normë të kamatës 8% *p.a.(d),* me kamatizim dyvjeçar. Sa pjesë prej borxhit është shlyer me anuitet prej të gjashtit deri te i njëmbëdhjeti?

8. Kredia amortizohet për 10 vjet, me anuitetet të barabarta kuartale, me normë të kamatës 16% *p.a.(d)*. Pas shlyerje së anuitetit 25, borxhi është zvogëluar për 4000 denarë. Sa është kredia?

9. Kredia amortizohet për 10 vjet, me anuitete të barabarta gjysmëviti dhe me kamatizim gjysmlviti, me normën e kamatës 10% *p.a.(d)*. Me anuitet, duke filluar prej të njëmbëdhjetës dhe pesëmbëdhjetës, borxhi është paguar në sasi prej 10000 denarë. Sa është kamata, por sa është borxhi i ngelur pas anuitetit të pesëmbëshjetë?

10. E shtata me radhë kamata e njehsuar, për borxhin i cili amortizohet me anuitet gjysmëviti dhe norma e kamatës prej 6% *p.a.(d)*, me kamatizim gjysmëviti është 130727 denarë. Njehso kredinë dhe mbetjen pas shtatë anuitete të paguara.

11. Kredia amortizohet për 12,5 vjet, me anuitet tremujor dhe kamatizim tremujor, me normë të kamatës 32% *p.a.(d).* Pas shlyerjes të 40 anuiteteve, mbetja e botxhit është 20000 denarë. Sa është kredia, por sa është anuiteti?

12. Për cilën kohë, me anuitet prej 40000 denarë, do të amortizohet kredia prej 1000000 denarë, me normën e kamatës 6% *p.a.(d).* Anuitetet janë gjysmëviti si edhe kamatizimi.

13. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarfta vjetore dhe kamatizim vjetor. Cakto kredinë, nëse shlyerja e parë është 200000 denarë, kamata në vitin e fundit është 11576,25 denarë, kurse kamata te priudha e parafundit është 22601,25 denarë.

14. Kredia prej 630182 denarë amortizohet me anuitetet tremujore dhe gjithashtu me kamatizim të atillë. Për sa periudha do të amortizohet kredia, nëse shlyerja e parë është 100000 denarë, por norma e kamatës është 8% *p.a.(d)*?

15. Kredia prej 509776 denarë amortizohet për 3 vjet, me anuitetet të barabarta mujore dhe kamatizim mujor. Sa është norma e kamatës, nëse anuiteti është 20000 denarë?

16. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarta vjetore dhe kamatizim vjetor. Sa është norma e kamatës nëse shuma e shlyerjes së tretë dhe të dytë është 20604 denarë, por ndryshimi i shlyerjes së karët dhe të dytë është 412 denarë?

17. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarta vjetore dhe kamatizim vjetor, me normë të kamatës 6% *p.a.(d)*. Cakto kredinë nëse pjesa tjetër e kredisë pas tre anuitetetve të paguara është 14720,17 denarë, kurse pjesa tjetër e kredisë pas gjashtë anuiteteve të paguara është 11164,76 denarë.

18. Kredia prej 300000 amortizohet për 10 vjetë, me anuitetet të barabarta gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti.Norma e kamatës vjetore është 6% *p.a.(d)*. Njehsoanuitetin dhe shëlyerjen e pjesës dhe mbetja e kredisë përfundimisht me vitin e gjashtë.

19. Kredia amortizohet për tre vjet, me anuitete të brabarta gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti dhe norma e kamatës 6% *p.a.(d).* Formo plan të amortizimit, nëse shlyerja e parë është 77298,75 denarë.

20. Kredia amortizohet me anuitetet të barabarta mujore dhe kamatizim mujor. Norma e kamatës është 12% *p.a.(d)*. Formo plan të amortizimit për kaër pagesat e para, nëse kamata në muajin e dytë është 87497,33 , kurse është 10000 denarë.

21. Kredia amortizohet për tre vjet, me anuitetet të barabarta tremujore dhe kamatizim tremujor. Norma e kamatës është 8% *p.a.(d).* Formo plan të amortizimit për tre periudhat e fundit, nëse kamata në periudhën e tretë është 4556,84 denarë.

22. Kredia amortizohet me anuitete të barabarta vjetore dhe kamatizim të vjetore me normën e kamatës 4% *p.a.(d)*. Formo plan të amortizimit për kredinë, nëse mbetja prej kredisë pas një anuiteti të paguar është 176652,92 denarë, kurse mbetja e kredisë pas dy anuiteteve të paguara është 135052,91 denarë.

23. Kredia prej 80000 denarë amortizohet me anuitet tremujor të rrumbullakuar dhe kamatizim tremujor, me normën e kamatës 8% *p.a.(d).* Për sa periudha do të amortizohet kredia, nëse anuiteti ti rrumbullakuar është 18000 denarë, por shlyerja e parë është 1000 denarë?

24. Kredia amortizohet me anuitet vjetor të rrumbullakuare. Kamatizimi është vjetor, nëse norma e kamatës është 3% *p.a.(d)*. Cakto mbetjen e anuitetit, nëse shlyerja e tretë është 10609 denarë, por pjesa e shlyer pas anuitetit të parafundit është 185989 denarë.

25. Kredia amortizohet për katër vjet, me anuitet tremujor të rrumbullakuar dhe kamatizim tremujor, me normën e kamatës 12% *p.a.(d)*. Cakto mbetjen e anuitetit, nëse kamata në periudhën e parafundit është 921,17 denarë.

26. Formo plan të amortizimit për kredinë prej 120000 denarë që amortizohet për pesë vjet, me anuitet vjetor të rrumbullakuar dhe norma e kamatës prej 4% *p.a.(d),* me kamatizim vjetor.

27. Kredi prej 100000 denarë amortizohet për 18 vjet, me anuitetet të rrumbullakuara gjysmëviti dhe kamatizim gjysmëviti. Formo plan të amortizimit për tre vitet e fundit, nëse norma e kamatës është 4% *p.a.(d).*

28. Kredia prej 20000 denarë amortizohet për dy vjet, me anuitet tremujor të rrumbullakuar prej 3000 denarë. Formo plan të amortizimit, nëse kamatizimi është tremujor.

29*. Kredia amortizohet me anuitet vjetor të rrumbullakuar për katër vjet. Formo plan të amortizimit , nëse pjesa e shlyer pas tre vjetëve është 81161,6 denarë, shlyerja e parë është 26000 denarë, por kamatizimi është vjetor.

30*. Kredia amortizohet për 8 vjet, me anuitet gjysmëviti të rrumbullakuar dhe kamatizim gjysmëviti. Formo plan të amortizimit për tre vitet e fundit, nëse norma e kamatës është 4% *p.a.(d),* por shlyerja e fundit është 4984,27 denarë.

31. Sa është anuiteti për kredi prej 500000 denarë, që duhet të amortizohet për 30 vjet, me normën e kamatës 2,8% *p.a.(d)*, me anuitetet të barabarta semestrale dhe kamatizimi semestral?

32*. Sa është kredia e cila duhet të amortizohet për 30 vjet, me normën e kamatës 2,8% *p.a.(d)*, me anuitetet të barabarta semestrale dhe kamatizimi semestral, nëse shlyerja e parë është 5372,22?

33*. Kredia amortizohet për 50 vjet, me 4% *p.a.(d)* kamata dhe kamatizimi vjetore, me anuitete të barabrta vjetore. Njehso anuitetet dhe kredinë, nëse pjesa e shlyer pas 20 anuiteteve është 58515,66 denarë.

34*. Për cilën kohë, kredia prej 2400000 denarë, do të amortizohet me anuitet semestral të rrumbullakuar prej 120000 denarë, me 2% *p.a.(d)* kamata dhe kamatizimi semestral? Sa është anuiteti i fundit?

Pasqyra tematike

Kredia paraqet shërbim i përkohësishëm nga ana e kreditorit ndaj borxhliut, përkatësisht kontratë për dhënien e mjeteve finansiare shfrytëzuesit, i cili të njëjtat mund t'i shfrytëzon edhe në afat të caktuar dhe në afat të caktuar t'i kthen.
Shuma me të cilën paguhet kredia në çdo periudhë, quhet **shlyerje,** por shlyerja, së bashku me kamatën për periudhë të caktuar, quhet **anuitet.** Periudha kohore, për tëcilën kryhet çdo shlyerje e veçantë e kredisë është **periudha e amortizimit.**

• sipas kohës të pagesës së anuiteteve, dallojmë kredi **me anuitete dekurzivr** (pagesa bëhet në mënyrë dekurzive, në fund të periudhave të caktuara të pagesësë) **dhe me anuitete anticipative** (pagesa kryhet në mënyrë anticipative, në fillim të periudhës sl pagesës).

• sipas mënyrës së njehsimit të kamatës, dallojmë kredi **me kamatizim dekurziv** dhe **me kamatizim anticipativ.**

A**mortizimi i kredisë** sikurse quhet pagesa graduale e kredisë sipas sasisë prej më parë të caktuar, në intervale kohore të caktuara, realizohet sipas pla nit prej më parë të konstatuar i cili quhet **plani amortizues.**

Kredia Z, që duhet të shlyhet me n eanuitetet të barabarta, çdonjëri prej tyre me sasi a, norma e kamatës p dhe kamatizimi i kamatës dekurzive, ku periudha e kamatiozimit puthitet me periudhën e pagesës së anuiteteve njehsohet sipas formulës:

$$\boxed{Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$$

ku r është faktori i kamatës dekurzive.
Kur dihet kredia, për njehsimin e anuitetit kemi:

$$\boxed{a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}$$

Nëse shlyerjen k e shënojmë me $b_{k,}$ kurse kamatën k me $i_{k,}$ atëherë anuiteti i parë është $a = b_1 + i_1$, ku kamata e parë është $i_1 = \frac{Zp}{100}$ njehsohet tërë kredia Z .

Duke e shqyrtuar çdonjërin prej anuiteteve të veçanta, arrijmë deri te formula e përgjithshme $a = b_n + i_n$, ku kamata n, i_n njehsohet për pjesën që ka ngelur prej borxhit $Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1}$, përkatësisht $\boxed{i_n = \frac{(Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1})p}{100}}$.

Shlyerjet e kredisë formojnë progresion gjeometrik, me anëtarin e parë, shlyerja e parë, b_1 dhe herësi, faktori i kamatës, r dhe poashtu $\boxed{b_k = b_1 r^{k-1}}$.

Në rastin e përgjithshëm, shlyerja k e shprehur nëpërmjet kredisë njehsohet sipas formulës:

$$\boxed{b_k = Z\frac{r-1}{r^n-1}r^{k-1}},$$

por e shprehur nëpërmjet anuiteteve me $\boxed{b_k = \frac{a}{r^{n-k+1}}}$.

Pjesa e shlyer prej kredisë për k periudha, përfundimisht me anuitetin k, O_k është shuma e k shlyerjeve të para $O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$, përkatësisht

$$\boxed{O_k = b_1\frac{r^k-1}{r-1}}.$$

Pjesa prej kredisë që ngel të shëlyhet pas anuitetit k, shënohet me R_{n-k} dhe për të kemi:

$$\boxed{R_{n-k} = b_1\frac{r^n-r^k}{r-1}}, \text{ përkatësisht } \boxed{R_{n-k} = a\frac{r^n-r^k}{r^n(r-1)}}.$$

Nëse shprehet afati i amortizimit n, nëpërmjet kredisë dhe anuitetit atëherë,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a-Z(r-1)}}.$$

Kur kredia prej Z denarë, amortizohet me anuitetet të barabarta, atëherë në fund të çdo periudhe, borxhkiu duhet të paguan sasi të barabartra të cilat përbëhen prej dy pjesëve, pjesa për shlyerje dhe pjesë për kamatë për borxhin që ka ngelur. Plani i amortizimit përpunohet sikurse në këtë tabelë.

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	Z	$i_1 = Zp/100$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = R_{n-1}p/100$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = R_2 p/100$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = R_1 p/100$	$b_n = a - i_n$	a

Pas relizimit të planit të amortizimit, është e nevojshme të kryejmë provë për saktësinë e planit të amortizimit:

kushti 1. Shuma e të gjitha shlyerjeve duhe të jetë e barabartë me kredinë $\sum b_j = Z$;

kushti 2. Shlyerja e fundit duhet të jetë e barabartë me mbetjen e fun dit, $b_n = R_1$;

kushti 3. Shuma e shtyllave të kamatave dhe shtylla të shlyerjeve duhe të jetë e barabartë me prodhimin e numrit të periudhave të amortizimit dhe anuitetit, $\sum i_j + \sum b_j = na$;

kushti 4. Anuitet është shuma e çdo kamaete dhe shlyerja përkatëse, $a = b_j + i_j$;

kushti 5. Shuma e shtyllave të kamatave është e barabartë me kamatën të njehsuar në shumën e shtyllave kredi mbetje $\sum i_j = \frac{p}{100} \sum R_j$.

Anuiteti a, të kredisë së caktuar, mund të jetë dhënë në sasinë konkrete ose pra si përqindje e kredisë. Këto anuitete më së shpeshti rrumbullakohen në numra të plotë (dhjetëshe, qindëshe etj.), kurse prej këtu quhen edhe **rrumbullakimi i anuiteteve,** por kreditë janë **kredi me rrumbullakim të anuiteteve.** Nëse anuiteti nuk është dhënë në njërën prej mënyrave të lartëpërmendur, por ekziston kusht kredia të amortizohet duke rrumbullakuar anuitetin, atëherë është e nevojshme të njehsohet përqindja për njehsimin e anuitetit. Edhe këtu do të flasim për kreditë dekurzive, me shlyerje në fund të periudhës së amortizimit dhe me njehsimin dekurziv të kamatës.

Le të jenë dhënë lartësi e kredisë Z, norma e kamatës $p\%$ $p.a.(d)$. Nëse dihet numri i periudhave të amortizimit, atëherë kërkohet përqindja p_1 e cila gjendet ndërmjet 100 V_p^n dhe 100V_p^{n-1}, që del prej faktir se duhet të kryhen n -1 shlyerje me anuitete të barabarta dhe n shlyerjaa me anuitet a_1 më të vogël se të tjerat. Anuitetet e rrumbullakuara janë më të mëdhaja prej anuitetetev të barabarta, pra anuiteti i fundit është i ndryshueshëm prej të tjerëve, më i vogël se ato dhe quhet **mbetja e anuitetit.**

Domethënë, nëse e dim anuitetin e rrumbullakuar, ai shprehet në përqindje p_1 prej kredisë, më së shpeshti numër i plotë, ose me formul $\boxed{a = \frac{p_1 Z}{100}}$, ku vlen

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1} - 1}}.$$

Poashtu, anuiteti i fundit dallohet prej anuiteteve të rrumbullakuara, quhet edhe **mbetja e anuitetit** dhe njehsohet me formulën

$$\boxed{a_1 = \left[Z - a\frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n}$$

Punimi i planit të amortizimit për kredi me anuitet të rrumbullakuar, është në të njëjtën mënyrë sikurse te kredia me anuitetet të barabarta, përveç për rreshtin e fundit, ku shkruhet anuiteti ti ndryshëm. Poashtu edhe shlyerja e fundit është më e vogël se të tjerat. Së pari është e domosdoshme të njehsohen madhësitë e nevojshme, por pastaj plotësohen tabelat e amortizimit.

Edhe këtu duhet të kryhet prova e planit të amortizimit dhe atë: $\sum b_j = Z$;

kushti 1. Shuma e të gjitha shlyerjeve duhet të jetë e barabartë me kredinë

kushti 2. Shlyerja e fundit duhet të jetë e barabartë me mbetjen e fundit, $b_n = R_{1;}$

kushti 3. Anuiteti i rrumbullakuar është shumë e çdo kamate dhe shlyerjen përkatëse, $a = b_j + i_j$, përveç të fundit që është i barabartë me mbetjen e anuitetit dhe kamatës përkatëse. ◆

Zgjidhje dhe përgjigje të detyrave

1.1.

1. a) 18750 denarë; b) 937,5 denarë; c) 260,4 denarë nga (30,360) dhe 256,85 denarë nga ((,365). **2.** 20 vjet. **3.** 5%. **4.** a) 14750 denarë; b) 87500 denarë. **5.** $K = K_1 + K_2 = 108000$ denarë. **6.** 2691 denarë.

1.2.

2. $I = 12000$, $K = 72000$ denarë. **3.** $I = 1760$, $K = 35200$ denarë. **4.** 70400 denarë.
5. $K = 33750$ denarë, $I = 150$ denarë. **6.** Borxh 260400 denarë, kamata 65100 denarë. **7.** Borxh 10568 denarë, kamata 568 denarë.

1.3.

4. 75 ditë. **5.** 5 muaj dhe 20 ditë. **6.** a) 50 ditë, 4.05; b) 13 dit, 4.05. **7.** 29 ditë, 2.05 . **8.** 23.04. **9.** 7.05.

1.4.

2. 123 ditë. **3.** 69 ditë ose 13.06. **4.** 25.02. **5.** 8.05, për 28 ditë me datën e startimit 10.04.

1.5.

4. $Dk = 21,875$ denarë; $D_r = 21,685$ denarë; ndryshimi = 0,1897. **5.** \$ 1 195 168,66

1.6.

4. 3 166. **5.** pagesa në 31.12. janë 17 976,1 denarë; pagesa = 15 200 denarë; kamata = 922 denarë; saldo = 2 776 denarë.

1.7.

5. Kamata e rregullt = 320,9 denarë, kamata e dënimit = 27,30; saldo e barazimit = 49.651,8 denarë.

1.8.

I. 826 ditë (ose 2 vjet, 3 muaj dhe 6 ditë). **2.** $K = 176147$ denarë. **3.** $p = 4,64\%$. **4.** $K = 306748$ denarë. **5.** $K = 300000$ denarë. **6.** 18000 denarë. **7.** $K = 105680$ denarë, $I = 5680$ denarë. **8.** 10.04 me 61,3%. **9.** për 246 ditë. **10.** 13.06.
II. diskont = 2222,22 shuma efektive =\$ 247 797,36.
12. shuma efektive = \$ 2 984 200. **13.** Shuma efektive = 147 546 denarë,
$D_k = 2\ 287,5$ denarë. **14.** \$ 147 192. **15.** 63 ditë. **16.** 2 471 denarë. **17.** pagesa = 79 770 denarë; pagesa = 65 000 denarë; saldo = 14 770 denarë; kamata = 1 770 denarë.
18. kamata e rregullt = 4.248 denarë, kamata e dënimit = 62,46 denarë; saldo e barazimit = 25.689,54.

2.1

2. a) 80 pjesë; b) 130 pjesë. **4.** a) 80 grejn; b) 5040 grejn. **5.** a) 23 karatë dhe 1 grejn; b) 16 karate 1 grejn; c) 232 penivejt dhe 11 grejn; ç) 209 penivejt 16 grejn.

2.2.

1. *W*80,,9,6. **2.** 979,17 %. **3.** 640 %. **4.** a) 600 °%o; b) *W*7,,2,4. **5.** a) 420 %o; b) *W* 121,,4,8.

2.3.

1. 158,4*g* . **2.** 498,75g . **3.** 700g. **4.** 384g .

2.5.

5. 5,5% rritja e euros dhe 5,1% rënia e dollarit **6.** Devalvimi, 46,3% **7.** 1,383

2.8.

4. 144.000 USD. **5.** 68.493.

2.9.

5. 0,694 - 0,6849

2.10.

1. 225 EURO **2.** Humbje 3.000 MKD

2.11.

1. Në ora 14, +20 EURO, në ora 19 -8 EURO **2.** Kursi mesastar 1,041 profiti 767,5 CHF. **3.** 100 MKD. **4.** 17 000 SHBA. **5.** Në ora 15.

2.12.

1. *W*2,,1,28 . **2.** 600 %. **3.** 881,25 %. **4.** a) 800 %; b) *W*30. **5.** 117,5g . **6.** 296g. **7.** 870%. **8.** 180 penivejt. **9.** +1,65% -1,57% **10.** Depresiacioni, 21,9% **11.** 1,3965. **12.** Në ora 14: profit 48 EURO, në ora 19 : humbje 24 EURO **13.** Kursi mesatar 1,64, profiti (i shprehur në AUD 1454, i shprehur në EURO 889).

3.1.

2. a) 2^{x+y}, b) 2^{-x}, c) 132^x, ç) 10^{xy}. **3.** a) $3^x = 9^{x/2}$, b) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x<0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x=0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x>0$. **4.** a) $x<y$, b) $x>y$, c) $x<y$. **5.** a) $4^x - 9^x$, b) $25^x + 25^{-x} - 2$, c) $64^x + 3\cdot 16^x + 3\cdot 4^x + 1$.

3.2.

1. a) $x=-3$, b) $x=0$, c) $x=8$, ç) $x=-3$, d) $x_1=4,\ x_2=-1$, e) $x=2$. **2.** a) $x=8$, b) $x=2$, c) $x=-15$ ç) $x=-6$. **3.** a) $x_1=1,\ x_2=0$, b) $x=0$, c) $x=-2$. **4.** a) $x_1=\frac{1}{4},\ x_2=0$, b) $x_1=2$, $x_2=-1$, c) $x_1=-1,\ x_2=6$. **5.** a) $x=4$, b) $x_1=-1,\ x_2=-\frac{3}{2}$, c) $x_1=3,\ x_2=2$.

3.3

1.

Koncepti	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a(b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
Logaritmi	3	2	4	5	$\frac{1}{2}$
Baza e logaritmit	6	x	$\sqrt{7}$	a	25
Logaritmandi	216	$\frac{4}{9}$	49	$b+2$	5

2. a) -2, b) 2, c) $\frac{1}{2}$, ç) $-\frac{1}{2}$. **3.** a) $x=\sqrt{3}$, b) $x=6$, c) $x=-2$, ç) $-2{,}1$. **4.** a) 2, b) 9. **5.** a) 1, b) 30, **6.** $x \in (-\infty,0) \cup (1+\infty)$.

3.4.

1. a) $\log x = \log 3 + \log a + \log b$, b) $\log x = 2\log a + \log b + 5\log c$, c) $\log x = -\log 2 + \log a + \log b - \log c$, ç) $\log x = \log 2 + \log(a-b)$, d) $\log x = \frac{1}{2}\log a - \log(b^2 - c^2)$, e) $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b$. **2.** a) $-\frac{1}{2}$, b) -18, c) 1. **3.** a) $x=10$, b) $x=\frac{8}{9}$, c) $x=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{2}}$, ç) $x=\sqrt[4]{\frac{4^6}{3^4}}$, d) $\frac{5}{3}$, e) $\frac{8}{27}$, f) $\sqrt[3]{6}$, g) 24. **4.** a) 0,60; 0,78; 0,90; 0,96; b) 1,08; 1,20; 1,26. **5.** a) -3, b) 3, c) -1, г) -1.

3.5.

2. Udhëzim: a) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1$,

b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 4} \cdot \log_5 4 \cdot \frac{1}{\log_5 6} \cdot \frac{\log_5 6}{\log_5 7} \cdot \frac{\log_5 7}{\log_5 8}$.

3. 8. **4.** a) $-\frac{1}{2}$, b) 18, c) $\sqrt{5}$. 5. $\log_b a = \log_{\left(\frac{1}{b}\right)^{-1}} a = -\log_{\frac{1}{b}} a$.

3.6.

1. $x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **2.** $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. **3.** $x=2$. **4.** $x_1 = 7$, $x_2 = \frac{16}{3}$. **5.** $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. **6.** $x=16$. **7.** 4.

3.7.

1. a) $x=y$, b) $x>y$, c) $x<y$. **4.** a) $a^{\frac{4}{3}}$, b) $a^{\frac{2}{3}}$. **5.** $x=8$. **6.** $x=2$. **7.** ŕ. **8.** $x=1$. **9.** $x=1$. **10.** 4. **11.** a) $x=4$, b) $x=\frac{1}{81}$, c) $x=\frac{1}{10}$, ç) $x=\frac{1}{2}$, d) $\sqrt[5]{100}$, ŕ) $x=2$.

12. a) $\log 2+\log x+\log y$, b) $\log 3+2\log x+3\log y$, c) $2\log x+5\log y+\frac{1}{2}\log z$

ç) $\sqrt{b}\log a+3\log c$, d) $\log 6+\log x+\frac{2}{3}\log y$, e) $\frac{1}{2}(\log 2+\log x)+\frac{1}{4}(3\log x+\frac{1}{2}\log y)$,

f) $\frac{1}{2}(\log x+\frac{3}{4}\log y)$. **13.** a) $x=6$, b) $x=10$, c) $x=21$, ç) $x=1125$. **14.** a) $x\approx 6{,}73$; b) $x\approx 0{,}00884$; c) $x\approx 76{,}296$. **15.** a) $2\log_4 5$, b) $\frac{2}{\log_{\sqrt{7}} 3}$, c) $-\log_{\frac{1}{10}} 5$. **16.** a) $\frac{1}{35}$, b) $\log_2\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. **17.** a) 8 b) 1. **18.** $x=1$. **19.** $x=5$. **20.** $x=25$. **21.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$. **22.** $x=7$.

23. $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=10$.

4.1.

1.

Shkallë	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. $\sin\beta=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $tg\beta=\frac{12}{5}$, $ctg\beta=\frac{5}{12}$. **3.** $\sin\beta\approx 0{,}87$, $\cos\beta\approx 0{,}49$,, $tg\beta\approx 1{,}77$, $ctg\beta\approx 0{,}56$. **4.** $\sin\alpha=0{,}8$,, $\cos\alpha=0{,}6$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$. **5.** $\sin\alpha\approx 0{,}78$, $\cos\alpha\approx 0{,}62$, $tg\alpha\approx 1{,}26$, $ctg\alpha\approx 0{,}79$.

4.2.

1. a) 0,54, b) 0,98, c) 0,84, ç) 0,54. **2.** a) 60^0, b) 70^0, c) 15^0, ç) 40^0. **3.** a) 1, b) 1, c) 1.
4. a) 3, b) $-\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$, c) 1. **5.** a) 45^0, b) 30^0, c) 45^0, ç) 60^0, d) 30^0.

4.3.

1. a) $\sin 48^0\approx 0{,}74$, $\cos 48^0\approx 0{,}67$, $tg48^0\approx 1{,}11$, $ctg48^0\approx 0{,}9$, b) $\sin 23^0 12' 23''\approx 0{,}39$, $\cos 23^0 12' 23''\approx 0{,}92$, $tg23^0 12' 23''\approx 0{,}43$, $ctg23^0 12' 23''\approx 2{,}33$, c) $\sin 16{,}19^0\approx 0{,}28$, $\cos 16{,}19^0\approx 0{,}96$, $tg16{,}19^0\approx 0{,}29$, $ctg16{,}19^0\approx 3{,}44$, **2.** a) $\sin\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}78$, $\cos\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}62$, $tg\frac{2\pi}{7}\approx 1{,}25$, $ctg\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}8$, b) $\sin\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $\cos\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $tg\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}93$, $ctg\frac{5\pi}{21}\approx 1{,}08$.
3. a) $35^0 42' 20''$, b) $44^0 25' 23''$, c) $67^0 32' 3''$, ç) $26^0 23' 16''$, d) $44^0 24' 55''$, e) $72^0 53' 50''$.
4. a) 0,01, б) $-0{,}2$. **5.** a) $25^0 55' 39''$, b) $17^0 26' 14''$, c) $46^0 12' 59''$.

4.4.

1. a) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $tg\alpha=\frac{5}{12}$, $ctg\alpha=\frac{12}{5}$, b) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $tg\alpha=\sqrt{15}$, $ctg\alpha=\frac{\sqrt{15}}{15}$, c) $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha=\frac{5\sqrt{41}}{41}$, $ctg\alpha=\frac{5}{4}$, ç) $\sin\alpha\approx 0{,}92$, $\cos\alpha\approx 0{,}39$, $tg\alpha\approx 2{,}44$, **2.** a) $\sin^2\alpha$, b) $-\cos^2\alpha$, c) 1. **6.** $\frac{55}{54}$. **7.** $6\sqrt{2}$.

4.5.

1. a) $\beta=53{,}8^0$, $a=40{,}1cm$, $b=54{,}9cm$, b) $\beta=74{,}2^0$, $a=11{,}7cm$, $b=3{,}3cm$, c) $\beta=24{,}6^0$, $b=5{,}14cm$, $c=5{,}65cm$. **2.** a) $\beta=8^0$, $a=1750{,}4cm$, $c=1767{,}6cm$, b) $\alpha=41^0\,30'$, $a=66{,}1cm$, $c=99{,}7cm$, c) $\beta=66^0$, $b=11{,}79cm$, $c=5{,}25cm$. **3.** a) $\alpha=45^0\,57'\,5''$, $\beta=42^0\,2'\,55''$, $b=224{,}48cm$, b) $\alpha=61^0\,55'\,39''$, $\beta=28^0\,4'\,21''$, $c=59{,}5cm$, c) $\alpha=21^0\,19'\,47''$, $\beta=68^0\,40'\,13''$, $c=338{,}16cm$. **4.** $45^0\,14'\,23''$. **5.** $36^0\,52'\,12''$. **6.** Од местото B авионот е на растојание $4182{,}78m$, а растојанието меѓу A и B е $1223m$.

4.6.

1. a) $34^0\,24'\,36''$, b) $18^0\,16'\,12''$, c) $23^0\,40'\,12''$. **2.** a) $36{,}43^0$, b) $45{,}19^0$, c) $73{,}87^0$. **3.** a) $0{,}44rad$, b) $1{,}49rad$. **4.** a) 105^0, b) $72^0\,45'\,56''$. **5.** a) 0, б) 2, c) $\frac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq 0$, **6.** a) 65^0, b) $47^0\,10'$, c) 30^0, ç) 40^0. **7.** a) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, b) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, c) $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$, $ctg\alpha=\frac{5}{3}$, ç) $\sin\alpha=\frac{25}{\sqrt{674}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{674}}$, $tg\alpha=\frac{25}{7}$. **8.** a) 7, b) -1. **9.** a) $\beta=53^0\,58'$, $a\approx 40$, $b\approx 55$, b) $\alpha=25^0\,40'$, $b\approx 936{,}43$, $c\approx 1038{,}94$, c) $\alpha=4^0\,50'$, $a\approx 0{,}05$, $c\approx 0{,}622$, ç) $\alpha=45^0\,57'\,5''$, $\beta=44^0\,2'\,55''$, $b\approx 222{,}48$, d) $\alpha=84^0\,44'\,6''$, $\beta=5^0\,15'\,54''$, $a\approx 42{,}32$. **10.** $b=a\pm 2c\cdot\cos\alpha$, $h=c\sin\alpha$. **11.** $2\,410m$.

5.1.

1. a) II-kuadranti, b) I-kuadranti, c) IV-kuadranti, ç) III-kuadranti, d) $x-$boshti, e) $y-$boshti, f) $x-$boshti, g) $y-$boshti. **2.** $M(1,0)$, $N(-2,0)$, $P(5,0)$, $Q(-3,0)$. **3.** $M(0,3)$, $N(0,4)$, $P(0,-2)$, $Q(0,-1)$. **4.** $m_x=4$, $m_y=2$.

5.2.

1. a) $d=\sqrt{82}$, b) $d=4$, c) $d=3\sqrt{5}$, ç) $d=3\sqrt{5}$. **3.** $y=11$ ose $y=-1$. **4.** $C(21,18)$. **5.** 13.

5.3.

1. $S_{AB}\left(4,-\frac{5}{2}\right)$, $S_{BC}(2,1)$, $S_{AC}\left(1,-\frac{7}{2}\right)$. **2.** 5. **3.** $(-1,-1)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(5,2)$. **4.** a) $\left(5,\frac{9}{5}\right)$, b) $\left(6,\frac{11}{5}\right)$, c) $(-7,-3)$, ç) $(18,7)$. **5.** $A(-2,-6)$, $B(8,2)$, $C(-6,10)$.

5.4.

1. $P=21$. **2.** Yo. **3.** Po. **4.** $P=15$. **5.** $P=\frac{55}{2}$. **6.** $P_{APB}=\frac{15}{2}$, $P_{PBC}=\frac{9}{4}$.

5.5.

1. Vetëm P është drejtëza. **2.** a) $y=x$, b) $y=-x$, c) $y=0$. **3.** a) $k=2$, $m=-3$, b) $k=-1$, $m=3$, c) $k=0$, $m=-2$, ç) $k=\sqrt{3}$, $m=0$. **4.** $y=\sqrt{3}x-\frac{1}{2}$. **5.** $y=-x-1$. **6.** $k=-\frac{6}{5}$, $m=\frac{7}{5}$. **7.** $y=-5x+2$.

5.6.

1. a) $2x-3y-3=0$ b) $y+4=0$ c) $x-3=0$. **2.** a) $k=2$, $m=3$, b) $k=\frac{5}{2}$, $m=\frac{3}{2}$, c) $k=-\frac{3}{8}$, $m=-\frac{16}{3}$. **3.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, $m=3$. **5.** Po.

5.7.

1. a) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1$, 4 njësi në boshtin *x*, 6 njësi në boshtin *y*, b) $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, 1 Njësi në boshtin *x*, 1 njësi në boshtin *y*, c) $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-2}=1$ $\frac{1}{2}$ njësi në boshtin y boshtin x, 1 njësi në boshtin y. **2.** $k=\frac{6}{85}$. **3.** $k=\pm\frac{5}{12}$. **4.** 18 njësi katrore.

5. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$.

5.8.

1. a) $y+3=k(x-2)$, b) $y-4=k(x+1)$. **2.** $3x+y+5=0$. **3.** $x+y+3=0$. **4.** a) $k=-\frac{7}{5}$, b) $k=-5$, c) $k=0$. **5.** $7x+5y-13=0$. **6.** Yo. **7.** $d=\frac{7}{5}$, jo. **8.** $d=\frac{2}{3}$. **9.** $d_M=\frac{10}{\sqrt{5}}$ и $d_N=\frac{8}{\sqrt{5}}$. **10.** $x+y=7\pm5\sqrt{2}$.

5.9.

1. a) priten në pikën (1,2), b) janë paralele, c) përputhen. **2.** a) $(5,0)\text{dhe}\left(0,\frac{1}{2}\right)$, б) $(-6,0)\text{dhe}(0,4)$. **3.** $5x-6y+28=0$. **4.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **5.** $2x+y-4=0$. **6.** $5x+3y-60=0$.

5.10.

1. $4(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{13})$. **2.** a) $M(7,1)$, b) $M(7,1)$. **3.** $\lambda=\frac{1}{2}$. **4.** $P=14$. **6.** $7x+10y+29=0$. **8.** $D(1,-5)$. **11.** a) $d=\frac{7}{5}$, b) $d=1$. **12.** $x-3=0$, $x-3y-7=0$, $x+3y-13=0$. **13.** a) $T(-4,0)$, b) H(4,4). **15.** $M(-3,8)$. **16.** $P=49$. **17.** $4x+3y-120$, $48x+9y+72=0$. **18.** $k_1=-\frac{1}{3}$, $k_2=1\,\text{dhe}\,k_1=-\frac{5}{3}$.

6. 1.

2. a) $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}$, b) $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25}$, c) 2,4,8,16,32, ç) $-1,2,-3,4,-5$. **3.** a) $\frac{4}{17}$, b) 27, c) 81. **4.** n=2010. **5.** n=256. **6.** a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{1}{5}$, c) 16, ç) 3. **7.** a) $a_n=2n+1$, b) n^2, c) $a_n=2+(-1)^n$, ç) $a_n=\frac{1}{n}$, d) $a_n=\frac{8}{2^n}$.

6.1.

3. Vargu është rritës. **4.** Rritës janë vargjet nën a), ç) dhe d), por zvogëlues janë vargjet nën b) dhe c). **5.** a) Nuk mundet, b) as rritës as zvogëlues. **6.** a) $a > 1$, b) $0 < a < 1$, c) $a = 1$.

6.3.

1. 299. **2.** 150. **3.** -77,6. **4.** Progresion aritmetik janë vetëm nën a) dhe c). Për progresionin nën a) anëtari i parë është 2 kurse ndryshimi është 6, por për progresionin nën c) anëtari i parë është 9 kurse ndryshimi është -5. **5.** Pas 8 vite, në 1 janar të v itit 2008. **6.** $d = 3$, $a_1 = 0$. **7.** Progresion aritmetik. **8.** Para se të fillon të kursen Jetoni ka pasur 14000 denarë, por çdo muaj ka kursyer nga 2500 denarë.

6.4.

1. a) 19, b) x. **2.** Anëtari i kërkuar është a_n+_1. **4.** n(n +1). **5.** a) 9399, б) 5850. **6.** 50. **7.** Prej $a_7 + a_n = a_5 + a_{20}$ dhe $a_7 + a_n = a_5 + a_{13}$ fitohet se $a_{13} = a_{20}$, por kjo është e mundshme vetëm nëse $d = 0$.

6.5.

1. 3. **2.** Progresion gjeometrik janë a) dhe ç). Te progresioni nën a) anëtari i parë është 2 por herësi është -4, te progresioni nën ç) anëtari i parë është 1, por herësi është 2. **3.** a) 10,125, b) 96. **4.** a) 50,363%, b) 12 vjet. **5.** Agimi. **6.** 256 herë.

6.6

1. a) 60, b) x. **3.** Anëtari i kërkuar është a_n+1. **4.** b = 15 ose b = 15. **5.** a) 1640, b) 40, c) $\frac{255}{128}$, ç) 340. **6.** a) 3, b) 27. **7.** $a_1 = 9$, $S_5 = 6\frac{7}{9}$.

6. 7.

2. Jo. **3.** Jo. **4.** 500500. **5.** 3000. **6.** 1840. **7.** a = 5, b = 8, c = 11. **8.** Udhëzim: zëvëndësoi vlerat për a_k dhe a_n sipas formulës për anëtarin e përgjithshëm të një progresioni aritmetik dhe pastaj trego se barazimi vlen. **9.** 2080 denarë. **10.** 100. **11.** b = 15 . **12.** Udhëzim: zëvëndësoi vlerat për a_k dhe a_n sipas formulës për anëtarin e përgjithshëm të një progresioni gjeometrik dhe pastaj trego se barazimi vlen. **13.** 1792. **14.** 20480 denarë. **16.** q = 1.

7.1

1. a) 18750 denarë; b) 937,5 denarë; c) 260,4 denarë nga (30,360) dhe 256,85 denarë nga ((,365). **2.** 20 vjet. **3.** 5%. **4.** a) 14750 denarë; b) 87500 denarë.
5. $K = K_1 + K_2$ = 108000 denarë. **6.** a) 6%*p.s.*; b) 3%*p.q.*; c) 1%*p.m.*. **7.** a) 4%*p.s.*; b) 8% *p.a.*;c) $\frac{2}{3}$%*p.m.*. **8.** 9,091% *p.a.(a)*. **9.** 11,11% *p.a.(d)*. **10.** 6% *p.a.(a)* = 6.38% *p.a.(d)*, pra më e volitshme është mënyra e dytë prej 6,5% *p.a.(d)* .

7.2

1. a) Me metodën e kombinuar 84538 denarë, vetëm me llogarinë e përbërë 84483,43 denarë; b) Me metodën e kombinuar 88124,3 denarë, vetëm me llogarinë e përbërë 88117,29 denarë.
2. 56331,55 denarë. **3.** 59395,02 denarë. **4.** 95600,58 denarë. **5.** 56059,84 denarë gjatë kamatizimit dekurziv, por 56400 denarë gjatë kamatizimit anticipativ. **6.** 24099 denarë. **7.** 17205 denarë.

7.3.

1. 40642 denarë. **2.** 7430 denarë. **3.** a) 44160 denarë; b) 43133,4 denarë. Ndryshjimi në sasinë te detyrat a) dhe c) vjen deri te rrumbullakimi. **4.** 6% . **5.** 3,923% dhe 1,943%.**6.** 16847 denarë.

7.4.

1. a) K = 75972,54 denarë; b) K = 74617,11 denarë. **2.** a) 43291 denarë; b) 42918,57 denarë. **3.** 250237,95 denarë. **4.** 27532,75 denarë. **5.** 54743,25 denarë.

7.5.

1. a) 24 vjet, 6 muaj dhe 28 ditë; b) 23 vjet, 7 muaj dhe 11 ditë. **2.** a) 39,19 tremujore; b) 39,36 tremujore **3.** a) 11,6196% *p.a.(a)*; b) 11,97% *p.a.(d);*

4. 3,925%*p.a.(d)*. **5.** 5%*p.q.(d),* 4,7*p.a.(a)*. **6.** 10,077 vjet. **7.** 25%*p.s.(d)*. **8.** 8,5%*p.a.(d)*. **9.** 3 vjet, 1 muaj dhe 18 ditë.

7.6.

I. Me metodën e kombinuar 211440 denarë, popr vetëm me llogarinë e kamatës së përbërë 210897,5 denarë. **2.** 35546,5 denarë. **3.** 112120 denarë. **4.** 10930 denarë. **5.** 186760 denarë borxh. **6.** a) 42252,7 denarë, me kamatë 7747,3 denarë; b) 42254,6 denarë, me kamatë 7745,4 denarë. **7.** 27 vjet. **8.** 17,175 vjet. **9.** 21729,79 denarë. **10.** 226765,67 denarë.

II. Oferta e fundit, 164893,32 . **12.** 21,65 tremujore. **13.** 1,95%. **14.** 125584 denarë. **15.** 474831,14 denarë. **16.** Më e volitshme është oferta e parë, oferta e dytë është më e vogël dhe është 52304,28 denarë. **17.** 18 vjet 4 muaj dhe 29 ditë. **18.** 5209,48 denarë. **19.** 6,6% *p.a.(d)*. **20.** 7,57% *p.a.(d)*. **21.** Për kohën prej 24,6 vjet, por shuma është 10000 denarë.

8.2.

1. a) $S_n = 225558$ denarë; b) $S_n = 227207$ denarë. **2.** $S_n = 120061$ denarë. **3.** a) $S_n = 39083$ denarë; b) $S_n = 40646$ denarë. **4.** a) 479782 denarë; b) 482431 denarë. **5.** a) 484580 denarë; b) 487304 denarë. Vlerat të krahasuara te detyrat 4 dhe 5 , na sjellin deri te përfundimi se depoziti anticipativ sjell më shumë vlerë të fundit, si edhe kamatizimi anticipativ. Vlera e fundit maksimale fitohet për kamatizimin e depozitit anticipativ.

8.3.

1. a) $V = 18781$ denarë; b) $V = 18729$ denarë. **2.** $V = 10000$ denarë. **3.** $V = 2866$ denarë. **4.** $V = 4603$ denarë. **5.** $V = 6826$ denarë.

8.4.

1. a) $n = 6$; b) $n = 5$. **2.** $n \approx 8{,}527$. Atëherë $n = 9$, $V_0 = 93048$ denarë. **3.** $n \approx 31{,}195$. Atëherë, $n = 32$, $V_0 =-279$ denarë (kjo do të thotë se do të kthehen 279 denarë). **4.** $V_0 = 118$ denarë. **5.** $n = 18$.

8.5.

1. $\frac{p}{2} = 4\%$. **2.** $\frac{p}{3} = 3{,}97\%$. **3.** a) 2,436%; b) 2,674% . **4.** $p = 8\%$. **5.** $p = 7{,}55\%$.

8.6.

4. $M_n = 119041$ denarë. **5.** a) $M_n = 15726$ denarë; b) $M_n = 16355$ denarë. **6.** $M_n = 637300$ denarë. **7.** $V = 5695$ denarë. **8.** 68044 denarë.

8.7.

1. Për kamatizimin dekurziv 7076,5 denarë, për kamatizimin anticipativ 7089,5 denarë. **2.** $R = 16700$ denarë. **3.** $R = 7575$ denarë. **4.** $R = 5991$ denarë. **5.** $R = 1670{,}5$ denarë.

8.8.

1. 10 renta. **2.** $n = 8$, 4 vjet. **3.** $n = 12$, $R_0 = 32667$ denarë. **4.** $n = 60$, $R_0 = 2160$ denarë. **5.** $n = 35$, $R_0 = 28$ denarë.

8.9.

1. $p = 16,8\%$ *p.* a *(d)*. **2.** $p = 5,756\%$ *p.* a *(d)*. **3.** $p = 8\%$ *p.* a *(d)*. **4.** 9,13% *p.* a *(d)*. **5.** 31136 denarë.

8.10.

1. $R = 3400$ denarë. **2.** 5220 denarë. **3.** 4200 denarë. **4.** 25000 denarë. **5.** 203454 denarë.

8.11.

1. 27403 denarë. **2.** 1480 denarë. **3.** 4 depozit. **4.** 6,54%. **5.** 8 vjet. **6.** $M_n = 286159,2$ denarë. **7.** $R = 2475,25$ denarë. **8.** $n = 12$, $R_0 = 3253,2$ denarë. **9.** 5,75% *p.a(d)*.
10. 11064,3 denarë. **11.** 45000 denarë. **12.** 175600 denarë. **13.** 50000 denarë. **14.** Para 3 vjet. **15.** 1128 denarë. **16.** 83972 denarë. **17.** 870058 denarë. **18.** 15940 denarë. **19.** 202716 denarë. **20.** 4850 denarë.

9.2

1. a) 96948,20 denarë; b) 195825,05 denarë; c) 393619,11 denarë. **2.** 34651,4 denarë.
3. 16650 denarë. **4.** 8903,64 denarë. **5.** 3057,85 denarë.

9.3.

1. 16882,63 denarë. **2.** Anuiteti është 17483,63 denarë. **3.** Kamata është 713182,32 denarë.
4. 9538,09 denarë. **5.** 5606,87 denarë.

9.4.

1. Mbetja prej 156137,24 denarë. **2.** Shlyerja 34462,95 denarë. **3.** Kredi prej 91269,92 denarë. **4.** 27058,08 denarë. **5.** 597738,82 denarë.

9.5.

1. 8%*p.a.(d)*. **2.** 50 anuitetet, për $n = 25$ vjet. **3.** 3,67%*p.a.(d)*. **4.** 4,13%.
5. $n = 10$ vjet.

9.6

1. $a = 19076,19$ denarë, por plani i amortizimit është paraqitur me këtë tabelë:

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	100000	4000	15076,19	19076,19
2	84923,81	3396,95	15679,24	19076,19
3	69244,57	2769,78	16306,41	19076,19
4	52938,16	2117,53	16958,66	19076,19
5	35979,50	1439,18	17637,01	19076,19
6	18342,49	733,70	18342,49	19076,19
Shuma	361428,53	14457,14	100000	

2. $a = 15761{,}4$ denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	80000	4000	11761,4	15761,4
2	68238,6	3411,93	12349,47	15761,4
3	55889,13	2794,46	12966,94	15761,4
4	42922,19	2146,11	13615,29	15761,4
5	29306,9	1465,35	14296,05	15761,4
6	15010,85	750,54	15010,86	15761,4
Shuma	291367,67	14568,39	80000,01	

3. $a = 21631{,}54$ denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	100000	8000	13631,54	21631,54
2	86368,46	6909,47	14722,07	21631,54
3	71646,39	5731,71	15899,83	21631,54
4	55746,53	4459,72	17712,82	21631,54
5	38574,74	3085,98	18545,56	21631,54
6	20029,18	1602,36	20029,18	21631,54
Shuma	372365,33	29789,24	100000	

4. $a = 3154{,}71$ denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	10000	100	2154,71	3154,71
2	7846,29	784,6	2370,18	3154,71
3	5475,12	547,51	2067,19	3154,71
4	2867,92	286,83	2867,92	3154,71
Shuma	26188,33	2618,33	10000	

5. Formo sistem prej të dhënave për dy kamatat e fundit. Fitohet $r = 1,1$, $\bar{u} = 6$, $a = 35431,22$, $Z = 154312,2$. Me këto të dhëna mund të formohet plan të amortizimit.

9.7.

1. $Z = 142857,14$ denarë. **2.** 31 vjet. **3.** 14 periudha. **4.** $Z = 100000$ dhe $a = 30000$. **5.** $a = 10000$ denarë.

9.8.

1. $a_1 = 1467,83$ denarë,

Periudha	Mbetja e borxhit	Kamata	Shlyerja
1	60000	2400	1600
2	58400	2336	1664
3	56736	2269,44	1730,56
4	55005,44	2200,22	1799,78
5	53205,66	2128,23	1871,77
6	51333,89	2053,36	1946,64
7	49387,25	1975,49	2024,51
8	47362,74	1894,51	2105,49
9	45257,25	1810,29	2189,71
10	43067,54	1722,70	2277,30
11	40790,24	1631,61	2368,39
12	38421,85	1536,87	2463,13
13	35958,72	1438,35	2561,65
14	33397,07	1335,88	2664,12
15	30732,95	1229,32	2770,68
16	27962,27	1118,49	2881,51
17	25080,76	1003,23	2996,77
18	22083,99	883,36	3116,64
19	18967,35	758,69	3241,31
20	17526,04	629,04	3370,96
21	12355,08	494,20	3370,96
22	8849,28	353,97	3646,03
23	5203,25	208,13	3791,87
24	1411,38	56,56	1411,38

2. Anuiteti është 3000 denarë.

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	20000	600	2400	3000
2	17600	528	2472	3000
3	15128	453,84	2546,16	3000
4	12581,84	377,46	2622,54	3000
5	9959,30	298,78	2701,22	3000
6	7258,08	217,74	2782,26	3000
7	4475,82	134,27	2865,73	3000
8	1610,09	48,30	1610,09	1658,39

3. $a = 2800$, $a_1 = 455{,}7$

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	8000	400	2400	2800
2	5600	280	2520	2800
3	3080	154	2646	2800
4	434	21,7	434	455,7
Shuma	17144	855,7	8000	

4. $a = 60000$ denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	200000	8000	52000	60000
2	148000	5920	54080	60000
3	93920	3756,8	56243,2	60000
4	37676,8	1507,07	37676,8	39183,87
Shuma	479596,8	19183,87	200000	

5. $a = 2000$ denarë, $a_1 = 1290{,}82$

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	20000	400	3600	2000
2	16400	328	3672	2000
3	12728	254,56	3745,44	2000
4	8982,56	179,65	3820,35	2000
5	5162,26	103,25	3896,75	2000
6	1265,51	25,31	1265,51	1290,82

9.9.

1. Anuitet 36386,32 denarë, gjithsej kamata 51090,56 denarë. **2.** 230982,04 denarë. **3.** 10006,18 denarë. **4.** 266467 denarë. **5.** 15300 denarë. **6.** Kredia 468019 denarë, janë të shlyera 200000 denarë, mbetja e borxhit është 268015 denarë, por kamata është 165634 denarë. **7.** 45856,62 denarë. **8.** 9126992 denarë. **9.** Kredia prej 36739,58 denarë, borxh ngelur 12763,67 denarë. **10.** 13140881 denarë. **11.** 1877255 denarë. **12.**. 46 anuitet të plotë dhe 47 anuitet jo i plotë. **13.** 862025 denarë. **14.** 6. **15.** 2%. **16.** 2%. **17.** 17705,37 denarë. **18.** a = 20164,71 denarë, o_{12} = 158449,71 denarë dhe R_8 = 141550,29 denarë.

19. $a = 92298{,}75$ denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	500000	15000	77298,75	92298,75
2	422701,25	12681,04	79617,71	92298,75
3	343087,54	10292,51	82006,24	92298,75
4	261077,3	7832,32	84466,43	92298,75
5	176610,87	5298,33	87000,42	92298,75
6	89610,45	2681,31	89614,45	92298,75
Shuma	1793083,41	53792,51	500000	

20. $a = 55415{,}31$ denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	1000000	10000	45415,31	55415,31
2	954584,69	9545,85	45869,6	55415,31
3	908715,23	9087,15	46328,16	55415,31
4	862387,07	8623,87	46791,44	55415,31

21. $a = 25364{,}84$ denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
10	73149,23	1462,99	23901,85	25364,84
11	49247,38	984,95	24379,89	25364,84
12	24867,49	497,35	24867,49	25364,84

22. Formo sistem për mbetjet $R_{n,}$ R_{n-1}, prej ku $n = 5$, a = 48666,12 denarë, por kredia Z = 216653 denarë. **23.** 14 periudha, përkatësisht 3,5 vjet. **24.** a = 16000 denarë, por kredia

Z = 200000 denarë. **25.** a =16000 denarë, kredia Z = 200000 denarë, anuiteti i fundit a_1 = 14432 denarë.

26. a = 30000 denarë,

Periudha	Mbetja e kredisë	Kamata	Shlyerja	Anuiteti
1	120000	4800	25200	30000
2	94800	3792	26208	30000
3	68592	2743,68	27256,32	30000
4	41335,68	1653,43	28346,57	30000
5	12899,11	515,96	12899,11	13415,07

27. p_1 = 4%,a = 4000, i_1 = 3000,b_1 = 3750, a_1 = 5987,27 . **28.** p_1 = 15%,p = 4%, a = 2728,79, b_1 = 2200, i_1 = 800. **29.** p = 4%,p_1 = 30%,a = 30000,Z = 100000 . **30.** p_1 = 7,5%,a = 7500, i_1 = 2000,b_1 = 5500. **31.** a = 12372,22. **32.** Z = 500000 . **33.** Z = 300000 , a = 13965,06 . **34.** 2n = 23, a_1 = 51235,02 .

Literatura e shfrytëzuar

1. Arnold Glen, Essentials of Corporate Financial Management, Harlow, UK, 2007

2. Berk,J and De Marzo,P, Corporate Finance, Harlow, UK, 2009

3. Fabozzi J. Frank, Franco Moodigliani, Michael G. Ferri, Foundation of financial markets and institutions, 2nd ed., 2000

4. Gitman, Principles of Managerial Finance, Addison - Wesley, 2007

5. Gitman, Principles of Managerial Finance, 12^{th} edn, Pearson, 2009

6. Mishkin, Eakins, Financial Markets and Institutions, Pearson, 2007

7. Sam Y. Cross, The Foreign Exchage Market, Federeal Reserve Bank of New York, 1998

8. S. G. Kellison, The theory of interest, Georgia State University, Irwin, 1991

9. Teresa Bradley, Paul Patton, Essential Mathematics for Economics and Business,

John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2002

10. B. Popov, Matematika për klasën IV për shkollat profesionale. Prosvetno dello, Shkup, 1977

11. V. Vraniq, Bazat e matematikës finansiare dhe aktuare, Zagreb 1964

12. G. Trençevski, Algjebra elementare. Prosvetno dello, Shkup, 2001

13. D. Janev, Z. Kolovski, G. Bilbilovska, M. Stojanovski, Matematika për ekonomistët, përmbledhje detyrash, Administrat bashkohore, Beograd, 1991

14. E. Stipaniq, Matetatika për klasën III dhe IV të gjimnazit drejtimi shoqëror-gjuhësor, Enti për botimin e teksteve Republika popullore e Sërbisë, Beograd, , 1962

15. Z. Ivanovski, A. Stankovska, Politika devizore, Univerziteti i evropës,2007

16. K. Soriq, Përmbledhje detyrash nga matematika me zbatim në ekonomi, Element, Zagreb, 2005

17. K. Trençevski, V. Kërstevska, G. Trençevski, S. Zdraveska, Analiza e matematikës për vitin e katërt të gjimnazit të reformuar, Prosvetno dello, 2003

18. M. Ivoviq, Matematika finansiare, Fakulteti ekonomik, Beograd, 2003

19. N. Davidoviq, Bazat e matematikës për ekonomistët, Kultura, Shkup,1975

20. R. Raleviq, Matematika finansiare dhe aktuare, Administrata bashkohore, Beograd, 1975

Autorë
Kostadin Trençevski
Aneta Gacovska
Nadica Ivanovska

Përktheu
Muzafer Beqiri

Lektor

Abdulla Mehmeti

Redaktor profesional

Prof. dr. Sadri Shkodra

Përpunimin kompjuterik
Muzafer Beqiri